

曲阜师范大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称: 基础数学 应用数学 概率论与数理统计

考试科目名称: 数学分析 (A)

注	1. 试题共 2 页.
意	2. 答案必须写在答题纸上, 写明题号, 不用抄题.
事	3. 试题与答题纸一并交上.
项	4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答, 字迹清楚.

一. 定义题 (第 1-2 每题 6 分, 第 3 题 12 分, 共 24 分)

1. 叙述函数 $f(x)$ 在数集 X 上无界的定义;
2. 叙述函数列 $\{f_n(x)\}$ 在数集 E 上一致收敛于 $f(x)$ 的定义;
3. 叙述函数 $f(x)$ 在 X 上一致连续的定义, 并用定义证明 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

二. 计算下列各题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3};$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right);$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ a+x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 为 $[1, 2]$ 上的连续函数, 求常数 a .

5. $I = \iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 是圆 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2};$

6. 设 $z = f(xz, z-y)$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 其中 f 具有连续偏导数, 求 dz ;

三. 证明题 (每题 13 分, 共 52 分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A > 0$, 证明: 存在 $X > 0$, 当 $x < -X$ 时有 $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$.
2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 证明: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续.
3. 设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 证明: 此方程对任意的正整数 n 存在唯一正实根 x_n , 并证明当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.
4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的正项级数, 并且数列 $\{u_n\}$ 单调下降, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$.

四. 按要求解答下列各题 (每题 10 分, 共 20 分)

1. 计算第一型曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围立体的表面.
2. 设 $e < a < b < e^2$, 证明: $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

五. (本题 6 分) 设函数 $f(t)$, $g(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续, x_0 为一常数, 证明: 存

在唯一的一个函数满足方程 $x(t) = x_0 + \int_a^t [f(u) + g(u)x(u)] du$.