曲阜师范大学2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科专业名称：理论物理　凝聚态物理　物理电子学

试科目名称：高等数学（A）

注意事项	1．试题共_3_页． 2．答案必须写在专用答题纸上，写明题号，不用抄题． 3．试题与答题纸一并交上． 4．须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔做答，字迹清楚．

、填空题（每题4分，共40分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=$____________．

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=$____________．

3．微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解为____________．

4．已知四阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，则行列式 $\left|B^{-1}-E\right|$ $=$________．

5．设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $div(gradu)=$______．

6．n 阶行列式 $\det\left(a_{ij}\right)$ 中为零的元多于 n^2-n 个，则 $\det\left(a_{ij}\right)=$__________．

7．曲线 $\begin{cases}\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转产生的旋转曲面的方程为______________．

8．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为__________________．

9．交换积分顺序 $I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=$____________．

10．设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\le x<\pi\\ 0, & -\pi<x<0\end{cases}$，则 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在点 $x=0$ 处收敛于____．

二．选择题（每题4分，共24分）（每题有且只有一个正确答案）

1．设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$________．

（A）$(x+y)^2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$；（B）$x^2\cdot\dfrac{1-y}{1+y}$；（C）$x\cdot\dfrac{1-y}{1+y}$；（D）$x^2-y^2$．

2．具有特解 $y_1=e^{-x}$，$y_2=2xe^{-x}$，$y_3=3e^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是____．

（A）$y'''-y''-y'+y=0$；　（B）$y'''+y''-y'-y=0$；

（C）$y'''-6y''+11y'-6y=0$；（D）$y'''-2y''-y'+2y=0$．

3．二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的充分条件是

（A）$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续；

（B）$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在；

（C）当 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时，$\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y$ 是无穷小量；

（D）当 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ 是无穷小量．

4．设 α 为常数且 $\alpha>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$

（A）发散；　（B）条件收敛；　（C）绝对收敛；　（D）收敛性与 α 有关．

5．设 A,B 都是 n 阶方阵，则 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 的充分必要条件是

(A) $A=E$；　(B) $B=O$；　(C) $AB=BA$；　(D) $A=B$．

6．实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 为正定的充分必要条件是

(A) $|A|>0$；　(B)存在 n 阶可逆矩阵 C，使 $A=C^TC$；

(C)负惯性指数为零；　(D)对某一 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$，有 $x^TAx>0$．

三．计算题（每题10分，共60分）

1．设$f(x)$是连续函数，且$f(x)=2x-2\int_0^1 f(t)dt$，求$f(x)$．

2．设$\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中$f(t)$的二阶导数存在，且$f''(t)\neq 0$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

3．设A^*为3阶方阵A的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，求$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$的值．

4．设线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$的系数矩阵为$A$，三阶矩阵$B\neq 0$，且$AB=0$，试求$\lambda$值．

5．计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中$\Sigma$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围立体表面外侧．

6．求通过两平面$\pi_1:2x+y-z-2=0$和$\pi_2:3x-2y-2z+1=0$的交线，且与平面$\pi_3:3x+2y+3z-6=0$垂直的平面方程．

四．证明题（第1题10分,第2—3题每题8分，共26分）

1．若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明：当$p>\dfrac{1}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$收敛．

2．设$f(x)$满足（1）在$[a,b]$上连续；（2）在(a,b)内可导；（3）$f(a)=f(b)$，证明：在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f'(\xi)=0$．

3．设λ_1，λ_2为n阶矩阵A的不同特征值，ξ_1，ξ_2分别是A的属于λ_1,λ_2的特征向量，证明：$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量．