曲阜师范大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：运筹学与控制论专业(运筹学方向)
考试科目名称：高等代数

注意事项	
	1.试题共 3 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

一. 计算题(共2小题. 35分)

1. 计算n阶行列式
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1-n & & 1 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
(15分).

2. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ $(a>0)$ 通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换矩阵. (20分)

二. (共2小题. 35分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ a+5 & -a-2 & 2a \end{pmatrix}$，问A能否对角化. (15分)

2. 已知 $\alpha_1=(1,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,5)$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$，$\beta=(1,1,b+3,5)$.

(1) a. b为何值时，β不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合；

(2) a. b为何值时，β有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的惟一线性表示式，并写出该表示式. (20分)

三. 证明题(共3小题，45分)

1. 证明：实对称矩阵A是正定矩阵的充要条件是A的主子式全大于零. (15分)

2. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间V的一组基，T是V的一个线性变换，证明：T可逆当且仅当 $T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n$ 线性无关. (15分)

3. 设A是秩为r的n阶方阵，证明：存在秩为n-r的n阶方阵B和C，使 $AB=CA$. (15分)

四. (共2小题, 35分)

1. 设有 n 阶实矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 证明:

如果 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

$|A|\neq 0$. (15分)

2. 设 A 是 n 阶实可逆矩阵. 证明: A 可分解为 $A=QR$, 其中 Q 为正交矩阵, R 是一个对角线上全为正实数的上三角阵, 并且这种分解是唯一的. (20分)