# 曲阜师范大学 2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：系统分析与集成

考试科目名称：线性代数

| | |
|---|---|
| 注意事项 | 1.试题共 2 页。<br>2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。<br>3.试题与答题纸一并交上。<br>4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。 |

1（15 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$

2（15 分）判断矩阵 $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ 是否可逆，若是则求出其逆矩阵 $A^{-1}$，否则说明理由。

3（15 分）对于任意的 $n$ 阶矩阵 $A$，证明：

(1) $A+A^T$ 是对称矩阵，$A-A^T$ 是反对称矩阵，这里 $A^T$ 表示 $A$ 的转置。

(2) $A$ 可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵和的形式。

4（15 分）

(1) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，判别向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 是否线性无关？

(2) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，那么向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\cdots\alpha_{n-1}-\alpha_n,\alpha_n-\alpha_1$ 是否线性无关？

5（15 分）已知 $R^3$ 的一组基 $B=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，求自然基 $B_1=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ 到 $B_2$ 的过渡矩阵 $A$，其中 $\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$。

6（20 分）求矩阵 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量，并根据你的计算结果能否直接给出矩阵 $A$ 的约当标准型表示？能则给出其约当标准型，不能则说明缘由。

7（20 分）若 $\lambda$ 是矩阵 $A$ 的特征值，$X$ 是 $A$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，证明

(1) $k\lambda$ 是 $kA$ 的特征值，其中 $k$ 为任意常数；

(2) $\lambda^m$ 是 $A^m$ 的特征值，其中 $m$ 为任意正整数；

(3) 由(1)(2)，推导 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值，其中 $f(A)=A^n+a_1A^{n-1}+\cdots a_{n-1}A+a_nI$，

$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为一个 $n$ 次多项式。

8（15 分）给出判定一个矩阵为正定矩阵的判据，然后根据你给出的判据判定矩阵 $A$ 是否为正定矩阵？这里 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$。

9（10 分）证明：

(1) 若 $A$ 是 $n$ 阶正定矩阵，则存在正定矩阵 $B$，使得 $A=B^2$。

(2) 若 $A$ 是 $n$ 阶半正定矩阵，则存在半正定矩阵 $B$，使得 $A=B^2$。

10（10 分）设方阵 $A$ 满足 $A^2-2A+4I=0$，判定 $A+I$ 和 $A-3I$ 是否可逆？若是求出其逆矩阵，否则说明理由。