

# 曲阜师范大学 2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称: 运筹学与控制论专业(运筹学方向)

考试科目名称: 数学分析

注 意 事 项	1. 试题共 <u>2</u> 页。
	2. 答案必须写在答题纸上, 写明题号, 不用抄题。
	3. 试题与答题纸一并交上。
	4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答, 字迹清楚。

一、(15 分) 证明 Cauchy 不等式, 即对任意两组实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 证明

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

二、(15 分) 证明数列  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$  是发散的

三、(15 分) 试用数学语言描述函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上不一致连续的定义。

四、(15 分) 设数列  $x_n$  满足对任意的  $n$ ,  $x_n \neq x^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 0, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x^*} = 1$$

五、(30 分) 计算极限或不定积分

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1 + x^2)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^a}, (a > 1)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

$$(4) \int x^2 \cos x dx$$

六、(15 分) 求函数  $f(x) = \sin x^2$  在  $x = 0$  点的 Taylor 展开式(要求展开式中至少有三项, 且有一项为通项)

七、(15 分) 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是区间  $(a, b)$  内的

不同点, 那么在  $(a, b)$  内存在点  $\xi$  使得  $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$



八、(15 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $(a, +\infty)$  上可导, 且存在值为有限的实数  $a, b$  满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b.$

证明:  $b = 0.$

九、(15 分) 若级数  $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n - a_{n-1}|$  收敛, 证明数列  $\{a_n\}$  收敛