曲阜师范大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：基础数学；应用数学；概率论与数理统计；

运筹学与控制论

考试科目名称：数学分析

注	1．试题共 3 页．
意	2．**答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题．**
事	3．试题与答题纸一并交上．
项	4．须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔做答，字迹清楚．

一．判断题(正确的划√，错误的划×，每小题 2 分，共 20 分)．

1．在$[a,+\infty]$上恒有$f(x)\ge g(x)$，若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}g(x)dx$也收敛（ ）

2．函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上连续。（ ）

3．级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则对$p=1,2,\ldots$，均有$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$。（ ）

4．$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$[a,b]$一致收敛必绝对收敛。（ ）

5．无穷大量与一个有界变量的乘积仍是一个无穷大量．（ ）

6．若$x_n>y_n$，$n=1,2,\cdots$，且$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim_{n\to\infty}y_n=b$，则必有$a>b$．（ ）

7．若$\{a_n\}$为无穷大量，则$\{a_n\}$一定无界。（ ）

8．若$f(x)$在(a,b)上递增有上界，则$f(a+0)$存在．（ ）

9．若$\lim_{x\to\infty}f(x)$存在，则$\lim_{n\to\infty}f(n)$存在．（ ）

10．若$|f|$在$[a,b]$上可积，则f在$[a,b]$上也可积．（ ）

二. 计算下列各题（每题 7 分，共 42 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+k}$，其中 $a\ge 0,k>0$；

2. $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$；

3. 设 $z=x\ln(xy)$，计算 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

4. 计算 $I=\iint\limits_D\dfrac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，其中 D 是圆域：$x^2+y^2\le 1$；

5. 计算 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$；

6. 求极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2}e^{-xy}\cos(x+y)dxdy$.

三. 按要求解答下列各题（每题 7 分，共 28 分）

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2},(x,y)\ne(0,0)$，判定 $f(x)$ 在 $(0,0)$ 的极限的存在性；

2. 判断数项级数 $\sum\dfrac{3^n n!}{n^n}$ 的敛散性；

3. 判断函数项级数 $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n},x\in(-\infty,+\infty)$ 的一致收敛性；

4. 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$，并判定 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

四. 证明下列各题（每题 10 分，共 60 分）

1. 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续；

2. 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\ne 0$，试用定义证明：$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{A}$；

3. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\int_a^b f^2(x)dx=0$，证明：$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$；

4. 证明：若$f(x)$为周期函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则$f(x)\equiv A$；

5. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r>1(a_n\neq 0, n=1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$是无穷大数列；

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)=0$，试证：$\forall\alpha\in R,\exists\xi\in(a,b)$使得$\alpha f(\xi)=f'(\xi)$