# 曲阜师范大学 2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：系统分析与集成

考试科目名称：线性代数

| 注意事项 | |
|---|---|
| | 1.试题共 2 页。 |
| | 2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 |
| | 3.试题与答题纸一并交上。 |
| | 4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。 |

1（15 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$

2（15 分）当 $a$、b 取何值时，下列线性方程组无解、有唯一解、有无穷多解？有解时，求其通解.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=1 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=a \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$$

3（15 分）设 $A$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\beta\neq 0$ 是 $m$ 维实列向量，证明：

(1) 秩 $r(A)=r(A^TA)$；

(2) 非齐次线性方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 有解。

4 （15 分）若方阵 $A$ 可逆，则 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 也可逆，并求出 $A^*$ 的逆矩阵.

若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，根据上述结论计算其伴随矩阵 $A^*$ 的逆矩阵。

5 （15 分）已知 $\begin{cases}\alpha_1=(2,1,4,3)\\ \alpha_2=(-1,1,-6,6)\\ \alpha_3=(-1,-2,2,-9)\\ \alpha_4=(1,1,-2,7)\\ \alpha_5=(2,4,4,9)\end{cases}$ 求由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 生成的空间

$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 的一组基和维数.

6（15 分）设矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ 相似，其中

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$$

(1)求 $x$ 和 $y$ 的值。　(2)求可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP=B$。

7(15 分)已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$，求正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出该正交变换 $x=Qy$。

8（15 分）设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性无关，非零向量 $\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 都正交，证明：$\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。

9（15 分）设矩阵 $A$ 为正定矩阵，试证明 $A+A^{-1}-2I$ 为半正定。

10（15 分）设矩阵 $A,B$ 为 $n$ 阶实方阵，且 $A^2=A$，$B^2=B$，$AB=BA$，试证明：存在可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP$，$P^{-1}BP$ 同时为对角形。