曲阜师范大学

2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：基础数学；　概率论与数理统计；

应用数学；　运筹学与控制论（控制论）

考试科目名称：《高等代数 A》

注意事项	1. 试题共 __3__ 页.
	2. **答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题.**
	3. 试题与答题纸一并交上.
	4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔做答，字迹清楚.

一. 判断题（正确的画○，错误的画×，每小题 3 分，共 30 分）

1. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零.（　　）

2. 二元二次型 $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&5\\5&4\end{pmatrix}$.（　　）

3. 方阵 A 可逆的充要条件是 A^* 可逆.（　　）

4. 两个同阶正定阵的积也是正定阵。（　　）

5. 若 A 为 $s\times n$ 矩阵，B 为 $n\times t$ 矩阵，则 $r(AB)\le r(A)+r(B)-n$。（　　）

6. 初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵。（　　）

7. 任意对称阵都合同于对角阵。（　　）

8. 全体复反对称阵对于矩阵的加法和数量乘法是实数域上的线性空间。（　　）

9. 实数域上的有限维线性空间的两个可交换的线性变换至少有一个公共特征向量。（　）

10. 两个矩阵相似的充要条件是两者有相同的特征多项式。（　　）

二．填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 不可约复系数多项式的次数等于______________。

2. 若两个向量组有相同的秩，且其中之一可由另一个线性表出，则这两个向量组__________。

3. 两个同阶复对称阵合同的充要条件是它们的______________________相等。

4. 若 A 为 n 阶对称阵，且对任意 n 维向量 X 有 $X'AX=0$，则 $A=$____________。

5. 线性空间 $P[x]_n$ 是____维的，且________是其一组基，$a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 在这组基下的坐标是________________________。

6. n 维线性空间的全体线性变换组成的线性空间的维数等于______________。

7. 方阵 A 的不变因子的个数___________A 的阶数。

8. 设 $A=S+K$，其中 S 为实对称阵，K 为实反对称阵．则对任意非零实列向量 X，恒有 $X'AX>0$ 当且仅当 S 为___________________。

9. 正交矩阵的特征值的模是_________________。

10. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是线性空间 V 的线性变换 σ 的所有不同的特征值．则 σ 在某一组基下的矩阵是对角阵的充要条件是 σ 的特征子空间 $V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_s}$ 的维数___空间 V 的维数。

三．计算行列式（10 分）

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

四．证明题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 叙述并证明有限维线性空间的维数公式.

2. 设 σ 是线性空间 V 的线性变换．证明：属于 σ 的不同特征值的特征向量和零向量的全体不构成 V 的子空间.

3．证明：子空间 V_i 的和 $\sum_{i=1}^{s} V_i$ 是直和的充分必要条件是 $V_i \cap \sum_{j=i+1}^{s} V_j = 0$，

$i = 1, 2, \cdots, s-1$．

4．设 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 r．证明：方程组 $AX = 0$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是其解空间的一组基．

5. 证明：若 A 是 n 阶正定阵，则 $\begin{vmatrix} A & X \\ -X' & 0 \end{vmatrix}$ 是正定二次型，其中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$．

6．设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一组基，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 P 中不全为零的数．证明：所有形如 $\sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i$ 的向量组成 V 的 $n-1$ 维子空间，其中 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是方程 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ 的解。

7．设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是实对称阵．证明：若 $a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则 A 为正定阵．

8．设 A 为 n 阶方阵，B 为 n 阶正定阵，且 $AB^2 = B^2 A$．证明：$AB = BA$．