

曲阜师范大学

2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：课程与教学论（数学）

考试科目名称：线性代数与数学分析

注 意 事 项	<p>1. 试题共 2 页.</p> <p>2. 答案必须写在答题纸上, 写明题号, 不用抄题.</p> <p>3. 试题与答题纸一并交上.</p> <p>4. 须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答, 字迹清楚.</p>
------------------	--

一. 计算题 (1-10 每题 8 分, 11-12 每题 10 分, 共 100 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^n+5^n+8^n}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x}{\sin x}}{x^2}.$

3. 设 $f(x)$ 为可导函数, 求 $y = f(e^x + f(x))$ 的导数.

4. 设 $f(u, v)$ 的二阶偏导数连续, $w = f(xy, x+y)$, 求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

5. 计算积分 $I = \int_1^e \sin(\ln x) dx.$

6. 判定二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ 的正定性.

7. 设三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩.

8. 求 $\iint_{x^2+y^2 \leq \pi} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy.$

9. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$.

10. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $2A(A-E) = A^3$, 求 $(E-A)^{-1}$.

11. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1$ 有公共解, 求 a 的

值及所有公共解.

12. 用正交变换化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ 为标准型, 并求出相应的正交变换 $X = HY$.

二. 证明题 (每题 10 分, 共 50 分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$, (x_0, A 均有限).
2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.
3. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明: $\int_0^x \left[\int_0^t f(t) dt \right] du = \int_0^x (x-u) f(u) du$.
4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.
5. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有连续的二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明:

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.