曲阜师范大学 2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：系统分析与集成

考试科目名称：线性代数

注意事项	
	1.试题共 2 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

1. (20 分) 计算下列行列式的值：

(1) $D_4=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{vmatrix}$，

(2) $D_n=\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$。

2. (20 分) k 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3 &= 4,\\ -x_1+kx_2+x_3 &= k^2,\\ x_1-x_2+2x_3 &= -4\end{cases}$$

有惟一解，无解，有无穷多组解？若有解，求出其全部解。

3. (10 分) 证明秩关系式：秩(A+B) ≤ 秩(A) + 秩(B)。

4. (20 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵，试证：A 为正定矩阵的充要条件是存在 n 阶可逆实矩阵 Q，使得 $A=Q^TQ$，其中 Q^T 表示矩阵 Q 的转置。

5. (10 分) 已知向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，

并且表示法惟一，试证：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是线性无关的。

6.(20 分)已知矩阵$A=PQ$，其中$P=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$Q=[2,-1,2]$，试求$A^n$，其中 n 是自然数。

7.(30 分)在R^3中线性变换A将基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$变为基$$\alpha_1'=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\ \alpha_2'=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\ \alpha_3'=\begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix},$$

试求：

(1) A 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵表示 A；

(2) 向量$\xi=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$及向量A$(\xi)$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标；

(3) 向量$\xi=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$及向量A$(\xi)$在基$\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'$下的坐标。

8.(20 分)已知 A 是$m\times n$实矩阵，B 是$m\times m$实矩阵，且矩阵$C=\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}$，试证：矩阵 C 可以对角化的充要条件是 A 与 B 都可以对角化。