

曲阜师范大学 2010 年攻读硕士学位研究生试题

学科、专业名称: 系统分析与集成

考试科目名称: 常微分方程

注 意 事 项	1. 试题共 2 页。
	2. 答案必须写在答题纸上, 写明题号, 不用抄题。
	3. 试题与答题纸一并交上。
	4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答, 字迹清楚。

1. (10 分 \times 2) 求解下列方程: (20 分)

(1) $y^2(1-y') = (2-y')^2$

(2) $y = y'^2 e^y$

2. (10 分) 求初值问题的解:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
3. (15 分) 求方程 $x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3$ 的奇解。4. (20 分) 设在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $\varphi(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 连续可微, 且有 $|h(y)| \leq Ky$ ($K > 0$ 为常数)。试证: 对任给的 x_0, y_0 , 方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)h(y)}{1 + g^2(x) + \varphi^2(x) + y^2}$$

满足 $y(x_0) = y_0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在。5. (20 分) 设 $f(t, x)$ 关于整个 (t, x) 空间连续可微, $f(t, x^0) \equiv 0$, 求证: 若方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 的非常数解 $x = \phi(t)$ 当 $t \rightarrow t_0$ 时趋于 x^0 , 则 $t_0 = +\infty$ 或 $t_0 = -\infty$ 。

6. (15 分) 求解非线性方程组:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + (x^2 + y^2 - 1)x \\ \frac{dy}{dt} = x + (x^2 + y^2 - 1)y \end{cases}$$

7. (20 分) 试求方程
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$
 的通解。

8. (30 分) 设 $\phi(t)$ 为方程 $x' = Ax$ (A 为 $n \times n$ 常数矩阵) 的标准基解矩阵 (即 $\phi(0) = E$), 证明:

(1). $\forall t, s \in R, \phi(t+s) = \phi(t) \cdot \phi(s);$

(2). $\phi(t-t_0) = \phi(t) \cdot \phi^{-1}(t_0)$, 其中 t_0 为某一值。