曲阜师范大学 2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称： 数学科学学院 学科教学(数学)

考试科目名称： 875 线性代数与数学分析

注意事项	
	1.试题共 2 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

第一部分 线性代数(共 75 分)

一. 填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. n 阶行列式 A 的值为 c,若将 A 的第一列移到最后一列,其余各列的相对位置保持不动,则得到的行列式的值为＝________。

2. 已知矩阵 A 的特征多项式 $f(x)=x^3+x^2-2$，则 $A+2E$ 的逆矩阵是__________。

3. 设 P 是数域，$P^{3\times3}$ 表示 P 上的所有 3×3 矩阵的集合，对于矩阵的加法及数乘运算，$P^{3\times3}$ 是 P 上的线性空间，令 $V=\{A\in P^{3\times3}\mid TrA=0\}$，则 $\dim V=$_____.

4. 在实函数空间中, 1, $\cos x$, $\cos 2x$ 是________(填线性相关或者线性无关).

5. 已知 A 的初等因子组为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\lambda-2,(\lambda-2)^2,\lambda+2,(\lambda+2)^2$,则 A 的不变因子组为________.

二. 计算与证明题(共 5 题,满分 60 分)

1.(10 分)设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+4x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+2u$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t,u 的值.

2.(12 分)用正交线性替换化二次型 $f=2x_1x_2+2x_3x_4$ 为标准形.

3.(10 分)设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix}$,$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,$V$ 是实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的线性空间,求 V 的维数和一个基.

4.(18 分) 设 η_0 是 n 元线性方程组的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是它的导出方程组的一个基础解系，令

$$\gamma_1=\eta_0,\gamma_2=\eta_1+\eta_0,\cdots,\gamma_{t+1}=\eta_t+\eta_0$$

证明：$\gamma\in R^n$ 是方程组的解的充要条件是存在一组和为 1 的实数 $u_1,u_2,\ldots,u_{t+1}$ 使得 $\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\ldots+u_{t+1}\gamma_{t+1}$.

5.(10 分)设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 是一个实对称矩阵,满足 $a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$,

$j=1,2,\ldots,n$,证明 A 是一个正定矩阵.

第二部分 数学分析(共 75 分)

一. 计算下列各题(每题 8 分,共 48 分)

1. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$;

2. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$;

4. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$;

5. 设 $f(u,v)$ 的二阶偏导数连续, $w=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$;

6. 计算 $\oint_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 C: $(x-1)^2+y^2=9$.

二. 证明题(每题 9 分,共 27 分)

1. 设 $0<x_1<\frac{1}{A}$, $x_{n+1}=x_n(2-Ax_n)$, $(n=1,2,\cdots)$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

2. 设 $f(x)$ 在 $\langle a,b\rangle$ 中具有有界的导函数,证明: $f(x)$ 在 $\langle a,b\rangle$ 中一致连续,从而证明 $f(x)=\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的二阶导数,且有 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 证明: $f(0)=0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。