05

山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：　高等数学 A

注意事项：1．本试卷共 九　道大题（共计 24 个小题），满分 150 分；

2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

4．考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。

* *

一．填空题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(2x)}=2$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(4x)}{x}=$ ___①___．

2．设函数 $y=f(t)=\lim\limits_{x\to 0}t(1+x)^{\frac{t}{x}}$，则 $dy=$ ___②___．

3．设 $f(x)$ 的原函数为 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $\int xf'(x)dx=$ ___③___．

4．设 $\vec{a}=\{3,5,-2\}$，$\vec{b}=\{2,1,4\}$，$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 与 oz 轴垂直，则 λ,μ 满足条件

___④___．

5．设 $f(u)$ 是连续函数，二次积分 $\int_0^2 dx\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$ 在极坐标系下的

二次积分为 ___⑤___．

6．已知连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，则 $f(x)=$ ___⑥___．

二．单项选择题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x-x^2}$ 是 x 的　　　　（ ① ）

（A）等价无穷小；　　　　　　　　　　（B）同价无穷小，但不等价；

(C)　高阶无穷小；　　　　　　　　　　（D）低阶无穷小；

2. 设函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(4-x)-f(2)}{x-2}=$ 　　　　(2)

（A）$-f'(x-2)$；　（B）$f'(x-2)$;　（C）$-f'(2)$;　（D）$f'(2)$.

3. 设有直线 $l:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线 l

(3)

(A) 平行于 π，但不在 π 上；　　　　(B) 在 π 上；

(C) 垂直于 π；　　　　　　　　　　(D) 于 π 斜交.

4. 设 $f(x)$ 为 $[-a,a]$　$(a>0)$ 的连续函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=$ 　　　　(4)

(A)　0；　　　　　　　　　　(B)　$2\int_0^a f(x)dx$;

(C)　$\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$;　　　(D)　$2\int_{-a}^{0} f(x)dx$.

5. 圆 $r=1$ 之外和圆 $r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ 之内的公共部分的面积 $s=$ 　　　　(5)

(A)　$\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} rdr$;　　　(B)　$2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} rdr$;

(C)　$\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} rdr$;　　　(D)　$2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} rdr$;

6. 已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某一函数的全微分，则 $a=$ 　　　　(6)

（A）　-1;　　（B）　0;　　（C）　1;　　（D）　2.

三. 计算下列各题：（本题共 6 小题，每小题 8 分，满分 48 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{1-\cos 2x}$.

2. 设$\begin{cases} x=\int_0^t e^{-u^2}du, \\ e^y\sin t-y+1=0, \end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

3. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}(\sin\sqrt{x})^2dx$.

4. 设 $f(x,y,z)=xyz\ln(1+x+y^2+z^3)$，求 $f'_x(1,1,1,)+f'_y(1,1,1,)+f'_z(1,1,1)$.

5. 计算 $I=\iint\limits_D \dfrac{e^{xy}}{y^y-1}dxdy$，其中 D 由曲线 $y=e^x$ 和直线 $y=2,\ x=0$ 所围成的区域.

6. 求微分方程 $(5x^2y^3-2x)y'+y=0$ 的通解.

四.（本题满分 8 分） 求满足方程 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)dt$ 的可微函数 $f(x)$.

五.（本题满分 9 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{1-x}$ 的收敛域及和函数.

六.（本题满分 9 分） 计算 $\oint\limits_L x^2dx+x\sin y^2dy$，其中 L 为沿 $x=1,y=x-1$ 及 $y=2$ 所围区域的整个边界曲线，并取逆时针方向.

七. 求平面 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点. (8分)

八.（本题满分 10 分）证明题：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 且 $f(a)<a, f(b)>b$.

（1） 证明：方程 $f(x)-x=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根；

（2） 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)>1$.

九.（本题满分 10 分）

若 $P(x,y)$ 为连接 $A(0,1),B(1,0)$ 两点的平面光滑凸曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任意一点，且弧 $\overset{\frown}{AP}$ 与弦 $\overline{AP}$ 之间的面积为 $\dfrac{1}{4}x^4$. 求曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程.