

# 山东师范大学

## 硕士研究生入学考试试题

考试科目: 高代数与解析几何

- 注意事项: 1. 本试卷共 8 道大题 (共计 40 小题), 满分 150 分;  
 2. 本卷属试题卷, 答题另有答题卷, 答案一律写在答题卷上, 写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁, 不要在试卷上涂划;  
 3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题, 其它均无效。  
 4. 考试结束后将本卷装入试题袋内, 不得带走, 否则以违纪论处。

一. (20分). 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

二. (25分). 已知下列方程组

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$$

① 解方程组(1), 用其导出组的基础解系表示一般解;

② 当方程组(2)中参数  $m, n, t$  为何值时, 方程组(1)与(2)同解。

三. (15分).  $f(x)$  为次数大于零的首项系数为 1 的多项式。

证明:  $f(x)$  是一个不可约多项式的方幂当且仅当对任意多项式  $g(x)$  必有  $(f(x), g(x)) = 1$  或对某一正整数  $m$ ,  $f(x) \mid g^m(x)$ 。



四.(20分).  $A$  是数域  $P$  上的  $n$  阶幂等方阵 (即  $A^2=A$ ), 证明:

$$P^n = V_1 \dot{+} V_2 \text{ (直和)}.$$

$$\text{其中 } V_1 = \{X \in P^n \mid AX=0\}, V_2 = \{X \in P^n \mid AX=X\}.$$

五.(20分). 设  $A$  为  $n$  阶实方阵,  $\beta = (b_1, \dots, b_n)'$  为实数域上  $n$  维向量,  $X = (x_1, \dots, x_n)'$ . 证明: 方程组  $AX=\beta$  有解的充分必要条件是  $\beta$  与方程组  $A'X=0$  的解空间  $W$  正交.

六、求与直线  $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{5}$  平行, 且与直线

$$L_1: \begin{cases} x = -2-t \\ y = -1+3t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{和 } L_2: \begin{cases} 2x+4y-5z-1=0 \\ 2x-7y+2z-17=0 \end{cases}$$

都相交的直线方程. (14分)

七、已知圆  $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2+z^2+x-2y+2z-1=0 \end{cases}$

(1) 求  $C$  的圆心坐标和半径.

(2) 求过  $C$  且与平面  $\pi: 3x+4y+10=0$  相切的球面的方程. (20分)

八、对单叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

双叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

= 圆锥面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

利用平行于  $xoy$  坐标平面的平面  $z=k$  ( $|k|>c$ ) 与三曲面的交线讨论三曲面的相对位置关系. (16分)