（装 订 线）

机密★启用前

青岛理工大学2011年硕士研究生入学试题

科目代码：812 科目名称：高等代数

注意事项：1.答题必须写明题号，所有答案必须写在答题纸上。写在试题、草稿纸上的答案无效；2.考毕时将试题和答题纸一同上交。

一、（12分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

二、（12分）已知A为$n\times n$可逆矩阵$(n\geq 2)$，A^*为A的伴随矩阵，$|A|$为A的行列式，E为n阶单位矩阵.

（1）证明：$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$；

（2）证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

三、（12分）已知A，B为n阶方阵，证明：线性方程组$ABX=0$与$BX=0$同解的充分且必要条件是$R(AB)=R(B)$. 其中，$R(AB)$和$R(B)$分别表示矩阵AB和矩阵B的秩.

四、（18分）已知线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2-6x_3-x_4=a \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \end{cases}$

（1）a取何值时方程组有解；

（2）在有解的情况下求方程组的一般解.

五、（18分）用正交变换将二次曲面 $x^2+2y^2+2z^2+2xz=5$ 化为标准形，写出正交变换阵T，指出该二次曲面为何种几何图形.

六、(12 分) 设线性空间 R^3 中有两组基,

A 组: $\vec{\alpha}_1=(1,1,1)$, $\vec{\alpha}_2=(1,0,1)$, $\vec{\alpha}_3=(1,0,2)$,

B 组: $\vec{\beta}_1=(0,1,2)$, $\vec{\beta}_2=(1,2,0)$, $\vec{\beta}_3=(1,0,2)$,

(1) 求 A 组到 B 组的过度矩阵 C;

(2) 求 R^3 中向量 $\vec{\xi}=(1,2,3)$ 在 A 组基下的坐标 $\vec{x}$.

七、(18 分) 已知 A 是数域 P 上的 n 阶方阵. $S(A)=\{X \mid X\in P^{n\times n}, AX=0\}$.

(1) 证明: $S(A)$ 是 $P^{n\times n}$ 的子空间;

(2) 如果 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 求 $S(A)$ 的一组基和维数;

(3) 如果矩阵 A 的秩为 $r<n$, 即 $R(A)=r<n$, 求出 $S(A)$ 的一组基和维数.

(找出的基不用验证).

八、(20 分) 设 $V=P^{2\times 2}$ 表示数域 P 上 2 级方阵全体按照矩阵加法和数乘运算构成的线性空间, 定义 V 上的变换: $T(A)=MA,\quad A\in V$

其中, $M=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

(1) 证明 T 是 V 上的线性变换;

(2) 求线性变换 T 在基

$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵 C;

(3) 求线性变换 T 的值域 TV 和 TV 的一组基;

(4) 求线性变换 T 的核 $T^{-1}(0)$ 以及 $T^{-1}(0)$ 的一组基.

九、(13 分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的行列式因子，不变因子，初等因子和 Jordan 标准形.

十、(15 分) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维欧几里得空间 V 的一组标准正交基，

T 是 V 上的线性变换，A 是线性变换 T 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵，

即 $T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$.

如果内积 $(T\alpha,\beta)=(\alpha,T\beta)$, $\alpha,\beta\in V$，称 T 是 V 上的对称变换；

如果内积 $(T\alpha,T\beta)=(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in V$，称 T 是 V 上的正交变换；

注：如果 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x$，$x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y$，$y'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

$(\alpha,\beta)=x'y$

证明：

(1) T 是对称变换当且仅当 A 是对称阵；

(2) 如果 T 既是对称变换又是正交变换，则 T^2 是恒等变换.