青岛科技大学 2005 年研究生入学考试试卷

考试科目：高等代数（试卷 A）

一（25 分）.设V_2是数域F上的 2 维线性空间，A是V_2上的线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$是$V_2$的一组基，

$$A(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}，\text{并设}(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix},$$

求：线性变换A^K在基(η_1,η_2)下的表示矩阵。

二（25 分）.设λ是非零实数，已知n阶方阵A满足$A^2-A-\lambda E=0$，

证明：A及$A+\lambda E$都可逆，并求它们的逆。

三（25 分）.设$n\ (n>1)$阶方阵A的伴随矩阵为A^*，

证明：①当$|A|=0$时$|A^*|=0$　　②当$|A|\neq 0$时$|A^*|=|A|^{n-1}$

四（25 分）. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$是线性空间$V_4$的一组基，线性变换$A$在这组基下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix},$$求A的值域与核。

五（30 分）. 设A_1,A_2,A_3,A_4皆为n阶方阵

①若A_1,A_3皆可逆，求矩阵$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\A_2&A_3\end{pmatrix}$的逆矩阵。

②若A_4可逆，且矩阵$B=\begin{pmatrix}A_1&A_3\\A_2&A_4\end{pmatrix}$可逆，试证$(A_1-A_3A_4^{-1}A_2)^{-1}$存在，并求$B$的逆。

六（20 分）. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维线性空间$V_n$的一组基，$A$是$n\times s$矩阵，并且

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，求证$\dim\ Span(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=rank\ A$。

其中：$Span\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right)$表示向量组$\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right)$生成的子空间，$rank\ \ A$是$A$的秩。