青岛科技大学 2005 年研究生入学考试试卷

考试科目: **数学分析 (B)** ***(答案全部写在答题纸上)***

一. 本题共 2 小题, 满分 30 分.

1. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

2. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$。

二. 本题共 3 小题, 满分 30 分。

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续, $\lim_{x\to 0+0} f(x)=A$, 则对任 $0<a<b$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}dx=A\ln\frac{b}{a}$$

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$ 的敛散性

3. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

三. 本题共 3 小题, 满分 30 分。

1.设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续且满足 $f(-\pi)=f(\pi)$, $f(x)$ 有分段连续的导函数, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足: $a_n=o(\frac{1}{n})$, $b_n=o(\frac{1}{n})$

2. 对任意正数列 $\{x_n\}$ 成立:

上极限 $\overline{\lim}\, n(\frac{1+x_{n+1}}{x_n})\geq 1$。

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 求 $I=\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)dy$, 其中 L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的任何分段光滑曲线(不含 $y=0$ 的点)

四. (20 分) 证明: $\int_0^1\frac{1}{x}\ln(\frac{1+x}{1-x})dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

五．（20 分）设 $f(x,y)$ 在 $I_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1)\}$ 上定义，在 $I_0=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, y=0\}$ 上连续， 证明：$\exists\delta>0$，使得 $f(x,y)$ 在 $I_\delta=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le\delta\}$ 有界。

六.（20 分） 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin(2x)+\cdots+a_n\sin(nx)$，且 $|f(x)|\le|\sin x|$，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实常数，求证：$|a_1+2a_2+\cdots na_n|\le 1$.