青岛科技大学2006年研究生入学考试试卷（A卷）

考试科目：高等代数（答案全部写在答题纸上）

一.（30分）设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且可由向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，试证① $r\le s$，② 适当地排列向量组 B 中向量的次序，使得以向量组 A 替换 B 中前 r 个向量后得到的向量组 $C:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s$ 与向量组 B 等价。

二.（30分）设秩为 r 的矩阵 $A_{r\times n}$ 的各行向量是某一齐次线性方程组的一个基础解系，B 是 $r\times r$ 非奇异矩阵，试证：BA 的各行向量也是该齐次线性方程组的基础解系。

三.（30分）设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是一复矩阵，$|A|=1$ 且 $a\neq 0$，①试将矩阵 A 表示成若干个初等矩阵的乘积。②将 A 表示成形如 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ 的初等矩阵的乘积。

四.（30分）设 A 是 n 阶复矩阵，若有正整数 m，使得 $A^m=E_n$（E_n 是单位阵）。

证明：① A 与对角阵相似。

②求 A 的最小多项式与 A 的全部特征值。

五.（15分）设 $A(\lambda)$ 是5阶 $\lambda-$ 矩阵，$rank(A)=4$，$A(\lambda)$ 的初等因子组为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,\lambda+1,(\lambda+1)^3$，试求① $A(\lambda)$ 的不变因子。②写出 $A(\lambda)$ 的标准形。

六.（15分）设 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 是 n 维欧氏空间 V_n 的标准正交向量组，证明对任意的向量 $u\in V_n$ 都有 $\sum_{i=1}^{m}(u,e_i)^2\le|u|^2$。（其中（$u,e_i$）表示 u 和 e_i 的数积）。