青岛科技大学 2006 年研究生入学考试试卷

考试科目： 数学分析（A） （*答案全部写在答题纸上*）

一． 本题共 2 小题，满分 30 分.

1. （15 分）用定义证明：函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续。

2. （15 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$0<x_n<1,(1-x_n)x_n>\frac{1}{4}(n=1,2,3\cdots)$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

二．本题共 3 小题，满分 30 分.

1.（10 分）设区间 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 满足 $E_j\subset[0,1](j=1,2,\cdots,n)$，若 $[0,1]$ 中的每一个点至少属于 $\{E_j,j=1,2,\cdots,n\}$ 的 q 个区间，证明： $\{E_j,j=1,2,\cdots,n\}$ 中至少有一个区间的长度大于或等于 $\frac{q}{n}$。

2. （10 分） 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi e(n!))$

3. （10 分）求由方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值。

三．本题共 3 小题，满分 30 分.

1.（10 分） 证明 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}dx$ 在 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛。

2. (10 分) 证明: 当 $b\neq0$ 时,

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(1-e^{-at})\cos btdt$$

在 $(0,+\infty)$ 上可导.

3.(10 分)计算第二型曲线积分

$$I=\int_{L^+} xdy-ydx$$

设 $L^+ : x^{2n+1}+y^{2n+1}=ax^ny^n\,(x\geq 0, y\geq 0)$为逆时针方向.

四. (20 分) 证明: $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x^2}{n})^{-n}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

五. (20 分)求 $$I=\iint_S xydydz+y\sqrt{x^2+z^2}dzdx+yzdxdy$$

其中 S 是由 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=4a^2$ 及 $y^2=x^2+z^2, y\geq 0$ 所围立体的表面, 积分取 S 的内侧.

六. (20 分)证明: 对任何正整数 $n\geq 2$ 成立; :

$$\frac{1}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<1$$