青 岛 科 技 大 学

二 OO 七年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

注意事项：1．本试卷共 5 道大题（共计 8 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

＊＊＊

一（20） 设 V_n 是实数域 R 上的线性空间，V_1 与 V_2 分别是线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_i-x_{i+1}=0$ （$i=1,2,\cdots,n-1$）的解空间，证明 $V_n=V_1\oplus V_2$。

二 （40） 设 $P^{n\times n}$ 是 n 级全体实矩阵构成的实数域 R 上的线性空间，

（1） $A\in P^{n\times n}$，记 $C(A)$ 是全体与 A 可交换的矩阵构成的集合，试证明 $C(A)$ 是 $P^{n\times n}$ 的一个子空间。

（2）当 $A=E_n$ （E_n 是 n 级单位阵）时，求 $C(A)$ 并求 $C(A)$ 的维数。

（3）当 A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$时，求 $C(A)$ 的维数并求 $C(A)$ 的一组基。

（4）记 C_0 是与全体 n 阶实矩阵都可交换的矩阵构成的集合，求 C_0 的维数与一组基。

三（30）

设V_n是数域 F 上的线性空间，σ　τ都是V_n上的线性变换，其中σ有 n 个两两不相同的特征值，试证明，$\sigma\tau=\tau\sigma$的充分必要条件为σ的特征向量也必是τ的特征向量。

四（30）

设 A（λ）是 5 级λ-矩阵，rank A(λ) = 4 , A(λ)的初等因子组为$\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,\lambda-1,\lambda+1,(\lambda+1)^3$　试求 A（λ）的不变因子与各级行列式因子，并求 A（λ）的标准形。

五（30）

（1）　试证A是正定矩阵当且仅当存在可逆矩阵B，使得 $A=B'B$

（2）　设 V 是欧式空间，σ是 V 上的对称变换，试证若V_1是σ的不变子空间　则　V_1的正交补$V_1^{\perp}$也是σ的不变子空间。