青 岛 科 技 大 学

二OO七年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

注意事项：1．本试卷共 8 道大题（共计 8 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

* *

一．（20 分） 设 $f(x)$ 映 $[a,b]$ 为自己且

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|;$$

任取 $x_1\in[a,b]$， 令

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$$

求证 $\{x_n\}$ 有极限 x^* 且 x^* 满足 $f(x^*)=x^*$。

二．（20 分） $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是否一致连续？证明你的结论。

三．（20 分） 设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(x)\to A(x\to 0+)$，则对 $b>a>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}dx=A\ln\frac{b}{a}$$

四．（20 分） 设 $\{x_n\}\in(0,1)(n=1,2,\cdots)$ 且满足 $x_i\ne x_j(i\ne j)$，讨论

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$$ 在 $(0,1)$ 的连续性，其中

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$$

五．（20 分） 若 R^2 上的可微函数 $f(x,y)$ 满足

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0$$

则 $f(x,y)$ 恒为常数。

六．（20 分）证明 $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{2+x^{\alpha}}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

七．（15 分） 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$，取外侧（$a>0,b>0,c>0)$

八．（15 分） 设

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x)),n=1,2,\cdots;$$

求证级数

$$f_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(x)-f_k(x))$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零。