

青岛科技大学 2008 年研究生入学考试试卷

考试科目：高等代数（答案全部写在答题纸上）

一、(30 分)

1 设 A 是三阶方阵，具有三个不同的(非零)特征值： λ_1 、 λ_2 、 λ_3 ，依次对应的特征向量为 α_1 、 α_2 、 α_3 ，令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ，试证： β 、 $A(\beta)$ 、 $A^2(\beta)$ 线性无关。

2 设 V_n 是 n 维线性空间， σ 是 V_n 上的线性变换， λ_0 是 σ 的一个 k 重特征值， V_{λ_0} 是 λ_0 对应的特征子空间，试证： $\dim V_{\lambda_0} \leq k$ 。（这里 $\dim V_{\lambda_0}$ 表示子空间的维数）

二、(30 分)

1 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，求 A^{100} 。

2 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，一元多项式 $f(x) = 2x^{11} + 2x^8 - 8x^7 + 3x^5 + x^4 + 17x^3 - 4$ ，求

$f(B)$ ，并求 $(f(B))^{-1}$ 。

三、(30 分)

试证：1 当 A 、 B 是两个 n 阶方阵时，有 $|\lambda E_n - AB| = |\lambda E_n - BA|$

2 当 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times m$ 矩阵($n > m$)时有： $|\lambda E_n - BA| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - AB|$

四、(30 分)

试证 矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 $r(A) = r(A \vdots B)$

五、(20 分)

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ ， $a_{ij} = 1$ ， $i, j = 1, 2, \dots, n$ ，试求 A 的特征值， A 的最小多项式。 A 是否与对角阵相似？若相似求出与其相似的对角阵。

六、(10 分)

给定方程组(1) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$ 与向量 $\alpha = (4, 2, -5, 1)$,

设 V_1 是(1)的导出方程组的解空间, α_0 是(1)的一个特解, 令 $V = V_1 + \alpha_0$, 试求向量 α 到 V 的距离。