青岛科技大学

二OO九年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

注意事项：1．本试卷共 5 道大题（共计 10 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

* *

一（30 分）

1. 试证：$x+1$ 整除多项式 $f(x)$ 当且仅当 $f(x)$ 的奇次项系数之和等于偶数项系数之和.

2. 把多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$ 用初等对称多项式表示出来.

二 （40 分）

1. 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是非零实数，且 $a_i\neq a_j(i\neq j)$ ，

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}$.

2. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 4 维线性空间 V_4 的一组基，已知线性变换 σ

在这组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

（1）求线性变换 σ 的值域 $\sigma(V_4)$ 与核 $\sigma^{-1}(0)$.

（2）在σ的核$\sigma^{-1}(0)$中取一组基，把它扩充成V_4的一组基，求σ在这组基下的表示矩阵.

三（40 分）

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$n$维向量，试证它们线性无关的充分必要条件是任一个$n$维向量均可由它们线性表出.

2. 设A是$n\times m$矩阵，B是$m\times n$矩阵，试证：

$$|E_n - AB| = |E_m - BA|.$$

四（30 分）

1. 设A是n级方阵，试证明：若 $A^2=A$，则

$$\text{rank}\,A+\text{rank}\,(A-\text{E})=n\ .$$

2. 试证：如果两个r级矩阵A与C的行向量组是同一个线性方程组的基础解系，则必存在一个r级的满秩矩阵B使得$A=BC$.

五（10 分）

1. 设$\text{f}(x)=x^3+bx^2+cx+d$为整系数多项式且 $bd+cd$ 为奇数，试证：$\text{f}(x)$在有理数域上不可约.

2. 设$\lambda_0\neq 0$，把矩阵$\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_0^{-1}\end{pmatrix}$表示成$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$型初等矩阵的乘积.

.