青 岛 科 技 大 学

二〇一二年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

注意事项：1．本试卷共 七 道大题，满分 150 分；

2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

* *

一（20 分）

求$\lambda-$矩阵$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$的不变因子。

二（20 分）

设A是数域P上$n\times m$矩阵，B是数域P上$m\times s$矩阵，试证：

$$r(AB)\le \min[r(A),r(B)].$$

三（20 分）

A, B分别是$n\times m$和$m\times n$矩阵, 若$\lambda\neq 0$，证明：

$$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|.$$

四（20 分）

证明：秩等于r的对称矩阵可以表成r个秩等于 1 的对称矩阵之和.

五（20 分）

设$f_1(x)=af(x)+bg(x), g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且$ad-bc\neq 0$，证明：

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)).$$

六（20 分）

假设向量β可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出，证明：表示法是唯一的充分必要条件是

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

七（30 分）

设V 是复数域上的n维线性空间，而线性变换 $\mathcal{A}$ 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是一若尔当块。证明

1) V 中包含ε_1的 $\mathcal{A}$ 不变子空间只有V 自身；

2) V 中任一非零 $\mathcal{A}$ 不变子空间都包含ε_n；

3) V 不能分解成两个非平凡的 $\mathcal{A}$ 不变子空间的直和。