310 数学分析

一．求下列极限（18 分）：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n}$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)\quad (a>0)$

（3）已知 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-xf(x)}{x^3}=0$，求：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-f(x)}{x^2}$。

二．证明下列结论（18 分）：

（1）设定义在实数 R 上的函数 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 两点连续，且在任何 $x\in R$ 有 $f(x^2)=f(x)$。证明：$f(x)$ 为常函数。

（2）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次连续可微，且满足 $|f(x)|\le M$（M 为正常数）。证明存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f''(x_0)=0$。

三．证明下列不等式（22 分）：

（1）证明不等式：$1+2\ln x\le x^2$，　$(x>0)$

（2）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明不等式：

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx。$$

四．（22 分）

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且满足：$x-f(x)=2\int_0^1 f(x)dx$，

求 $\int_0^1 f(x)dx$ 的值。

（2）设 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(1+t)}{t}dt\quad (x>0)$，证明：$f(x)+f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$。

五.（22 分）

(1)将 $\ln(3+x)$ 展开为 x 的幂级数，给出收敛域并由此计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 的值。

(2)证明级数：$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(n!)^2}$，满足方程：$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-y=0$ 。

六.（12 分）

计算：$\int_C (2a-y)dx+xdy$, 其中 C 为摆线

$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\quad (0\le t\le 2\pi)$ 的一拱。

七.（14 分）

设 $u(x,y), v(x,y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数，证明：

$$\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy+\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds$$

其中 D 为光滑曲线 L 所围的平面区域，而 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 是 $u(x,y)$ 沿曲线 L 的外法线 $\vec{n}$ 的方向导数。

八.（22 分）

（1）计算第一型曲面积分：$\iint_S\sqrt{x^2+y^2}dS$，其中 S 为螺旋面

$x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$（$(0\le u\le 2, 0\le v\le 2\pi)$ 的部分。

（2）计算下面的三重积分：$\iiint_V\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}dxdydz$，其中 V 是由

$z=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域。