312 数学分析与线性代数

一．（每小题 5 分，共 20 分）求极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x$　　4. $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

二．（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

三．（10 分）设 $z=f(x,\dfrac{x}{y})$，　求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

四．（5 分）已知：$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$．

五．（15 分）求摆线　$x=a(t-\sin t)$，　$y=a(1-\cos t)\ (a>0)$，一拱的长．

六．（15 分）计算　$\iiint\limits_V zdxdydz$，其中　$V:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$．

七．（15 分）求微分方程

$$y''-5y'+6y=xe^{2x}$$

的通解．

八．（10 分）设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续．

九.（每题 5 分，共 10 分）设三阶方阵 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，若 A 的行列式为 $|A|=-2$，记 $B=(\alpha_3,\alpha_2,2\alpha_1)$，

A^* 为 A 的伴随矩阵，A^{-1} 为 A 的逆矩阵，

求：(1) $|2(A+B)|$；(2) $|A^*+A^{-1}|$

十.（每题 5 分，共 10 分）设 A、B 分别为 m 阶和 n 阶可逆阵，

(1) 求分块阵 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵，其中 0 表示零分块矩阵；

(2) 若 $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \neq 0$，求 $\begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1}$

十一.（每题 5 分，共 10 分）设 $A\in R^{m\times n}$，证明：

(1) $R(A^TA)=R(AA^T)=R(A)$， A^T 为 A 的转置矩阵；

(2) 若 A 为行满秩的，则 AA^T 为正定矩阵。

十二.（每题 5 分，共 10 分）三阶方阵 A 的秩为 2，η_1,η_2 为非齐次线性方程组 AX=b 的解，若 $\eta_1+\eta_2=(6,0,2)^T$，$\eta_1+3\eta_2=(12,-2,6)^T$，求

(1) 导出组 AX=0 的一个基础解系； (2) AX=b 的通解。

十三.（每题 5 分，共 10 分）设 $A=XX^T, X\in R^n$，且 $X\neq 0$

(1) 求 A 的特征值；

(2)若取 $X=(1,1,1)^T$ ，求一正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵。