一、（18 分）

1．求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$。

2．计算定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$。

3．设参数方程 $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$，

其中 $f(t)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(t)\neq 0$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

二、（15 分）从原点 $O(0,0)$ 向抛物线 $y=x^2+1$ 引两条切线，记 D：由抛物线与所引两切线所围成的图形。

（1）求图形 D 的面积 A;

（2）求图形 D 绕 X 轴旋转一周而生成的旋转体之体积 V_x。

三、（15 分）设 $F(x)=\int_0^x t^2 f(t)dt$，其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，

且 $F(1)=f(1)$。证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$。

四、（15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。又问 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值或最小值吗？

五、（12 分）已知 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，并且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，令 $g(x)=f(x)+\sin^2 x$。证明：$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是一致连续的。

六、（15 分）

1．设n为正整数，$x,y>0$，证明：$\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$。

2．设$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求：$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$。

七、（15 分）计算$\iint\limits_D x^2y^2dxdy$，其中$D$为$xy=1,\ xy=2,\ y=x,\ y=6x$所围成的区域。

八、（15 分）

1.计算$\int_L x^2ds$，其中L为球面$x^2+y^2+z^2=9$被平面$x+y+z=0$所截得的圆周。

2．设曲线积分$\int_C (f(x)-e^x)\sin ydx-f(x)\cos ydy$与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且$f(0)=0$，求$f(x)$。

九、（15 分）设曲面$\sum$为：$z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$的下侧，

计算$I=\iint\limits_{\Sigma} y^3dzdx+(y+z)dxdy$。

十、（15 分）判定幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2x^n}{n!}$的收敛范围，并求其和函数。