一、计算题（1~5 小题各 16 分，6~7 小题各 20 分，合计 120 分）

1、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$

2、设矩阵方程为：$2X=AX+B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 X。

3、求向量 x 在一组基向量 $a_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的坐标 x_1,x_2,x_3 变换到另一组基向量 $\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的坐标 y_1,y_2,y_3 的变换关系式。

4、λ 取何值时，方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 有非零解？并求出这些非零解。

5、已知向量 $\beta=(1,3,-3)^T, \alpha_1=(1,2,0)^T, \alpha_2=(1,a+2,-3a)^T, \alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$.

试讨论 a,b 为何值时，① β 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；② β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地表示；③ β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，但表示式不惟一。

6、设对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$，已知 A 有二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$。求：① x 和另一特征值 λ_3；② A 的所有特征向量。

7、已知二次型，$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$。① 写出二次型对应的矩阵$A$；② 求正交变换，把二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型。

二、证明题（每小题 10 分，合计 30 分）

1、已知方阵A,B满足$A^2=A,(A+B)^2=A^2+B^2$，证明：$AB=0$。

2、A为n阶方阵，x,y是n维列向量，且$Ax=0,A^Ty=2y$，证明x与y正交。

3、n阶方阵A满足$A^2=A$，证明：$\mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}(A)=n$。（$I$为$n$阶单位阵）