山东科技大学2008年招收硕士学位研究生入学考试

高等代数试卷

一、(20分)

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 为三个多项式，并且 $(f(x),g(x))=1$ ，$(f(x),h(x))=1$。证明：

1、$(f(x),g(x)h(x))=1$,

2、$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。

二、(15分)

设 η 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解向量，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关。

三、(30分)

设 n 级方阵 A 和 B 满足 $A+B=AB$，证明:

1. $A-E$ 可逆（其中 E 为 n 级单位矩阵);

2. 秩 (A)=秩 (B);

3. $AB=BA$.

四、(25分)

实二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$。

（1）当 a 取何值时 f 正定;

（2）若实二次型 f 可通过正交变换化成标准形

$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 的值及所用的正交变换矩阵。

五、(20 分)

设 n 级方阵 A,B,C,D 关于乘法两两可换，且 $AC+BD=E,$（E 是 n 级单位阵）。设方程 $ABx=0, Bx=0, Ax=0$ 的解空间分别是 W,V_1,V_2，证明：

$W=V_1\oplus V_2$。

六、(20 分)

设 A 是 n 维线性空间 V 的线性变换，AV 表示 A 的值域，$A^{-1}(0)$ 表示 A 的核，证明：

维（AV）+维（$A^{-1}(0)$）=维（V）。

七、 (20 分)

设 T 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，λ_0 是 T 的一个特征值，V_{λ_0} 是 T 关于特征值 λ_0 的特征子空间.

1. 证明：维 $(V_{\lambda_0})\le\lambda_0$ 的重数；

2. 是否有可能维 $(V_{\lambda_0})<\lambda_0$ 的重数？如果有可能，试举例说明。