聊城大学 2011 年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[808]高等代数	B卷
适用专业	基础数学 应用数学 系统理论	

注意事项：1、本试题共 4 道大题（共 11 个小题），满分 150 分。
2、本卷为试题，答题另有答题纸，答案一律写在答题纸上，写在该试题纸上或草稿纸上无效。
3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔作答，其它均无效。
4、特殊要求携带的用具请注明，没有特殊要求填"无"。 无

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分。）

1. 已知排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 的逆序数为 k，则 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数为________。

2. 设 σ 是数域 F 上线性空间 V 上的幂等变换（$\sigma^2=\sigma$），则 σ 的特征值为________。

3. 设 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3, g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$，则 $(f(x),g(x))=$________。

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 A 的最小多项式为________。

5. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个实系数二次型，则其规范形为________。

二、计算题（第 1 题 20 分，第 2 题 25 分，共 45 分）

1. （20 分）设 $\sigma\in L(V)$，且 σ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$。问：

(1) σ 是否可以对角化？

(2) 若 σ 能对角化，求出 V 的一个基，使 σ 在此基下的矩阵为对角矩阵。

2. （25 分）设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&4\\-1&-1&3\end{pmatrix}$，求 (1) A 的行列式因子组；(2) A 的不变因子组；(3) A 的初等因子组；(4) A 的 Jordan 标准型；(5) A 的特征多项式；(6) A 的最小多项式。

三、证明题（每题 20 分，共 40 分）

1. （20 分）证明：设 $p(x)\in F[x]$ 且 $\deg p(x)\geq 1$。则 $p(x)$ 在数域 F 上不可约的充要条件为 $\forall f(x)\in F[x]$，有 $p(x)\mid f(x)$ 或 $(p(x),f(x))=1$。

2. （20 分）证明：欧氏空间 V 上的对称变换的属于不同特征值的特征向量是正交的。

四、综合题（每题 20 分，共 40 分）

1. 设 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约，$\deg f(x)\geq 2$。证明：

(1) $f(x)$ 的常数项不为零；

(2) 对任意自然数 m，$(f(x),x^m)=1$ 是否成立？ 为什么？

2. 定义线性空间 R^2 的线性变换如下：

$$\sigma:\quad R^2\longrightarrow R^2$$
$$(x_1,x_2)\rightarrow(-x_2,x_1)$$

(1) 求σ在R^2的基$\alpha_1=(1,2),\alpha_2=(1,-1)$下的矩阵；

(2) 证明对任何实数c，线性变换$\sigma-cI$是可逆线性变换，其中I为恒等变换；

(3) 设σ在R^2的某一组基下的矩阵为$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, b_{ij}\in R(i,j=1,2)$，证明乘积$b_{12}\times b_{21}$不等于0。