2010 年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学（B） 报考专业：

要求：1、答案一律写在答题纸上

2、需配备的工具：

一.选择题：（每小题 3 分，共 30 分）

1.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 a 等于(　　)

A. -1； B. 1； C. 2; D. 3

2.设 $f(x)>0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$,则（　　）

A. $a>0$； B. $a\geq 0$； C. $a=0$； D. a 的符号不能确定.

3.下列函数中在 $x=0$ 处可导的是(　　).

A. $y=|x|$ ； B. $y=x^3$; C. $y=2\sqrt{x}$； D. $y=\ln x$

4. 函数 $y=x-\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是(　　).

A.单调增加 ； B.单调减少 ； C.不单调; D.不连续

5.变上限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 是(　　).

A. $f'(x)$ 的一个原函数; B. $f'(x)$ 的全体原函数 ；

C. $f(x)$ 的一个原函数; D. $f(x)$ 的全体原函数.

6.设函数 $z=3^{xy}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于(　　).

A. $y^{3^{xy}}$ ； B. $3^{xy}\ln 3$; C. $xy^{3^{xy-1}}$ ； D. $y3^{xy}\ln 3$.

7.下列函数中，点（0，0）不是极值点的函数是(　　).

A. $z=3x^2+4y^2$ ； B. $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ ；

C. $z = xy$； D. $z=\begin{cases}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 5, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

8.方程 $x^5+x-1=0$ 是（ ）.

A. 没有实根； B. 有且仅有一个实根；
C. 有且仅有两个不同的实根； D. 有三个不同的实根.

9.设积分区域 D 为：$1\le x^2+y^2\le 4$，则二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$（ ）.

A. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr$； B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^4 dr$； C. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2dr$； D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 rdr$

10. 设 $z=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$，则 $dz|_{(1,1)}=$（ ）

A. $dx+dy$； B. $3(dx+dy)$； C. $\dfrac{dx+dy}{3}$； D. $\dfrac{dx+dy}{2}$.

二.填空题：（每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{x+1}=$____________.

2. 设函数 $y=\cos(e^{-x})$，则 $y'(0)=$__________.

3. 方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$ 的通解为__________.

4. 曲线 $y=x^3-3x+1$ 的拐点是________.

5. 函数 $f(x)$ 有连续二阶导数且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$________.

6. 函数 $z=xe^{2y}$ 在点 P（1，0）处沿从点 P（1，0）到点 Q（2，-1）的方向的方向导数为________.

7. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x-5\ (1\le x\le 4)$,当 $x=$______时取得最大值.

8.不定积分 $\int x^2e^{2x^3}dx=$________.

9.若 $z=\tan\frac{x}{y}$,则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

10.若积分区域 D 是由 $x=0,x=1,y=0,y=1$ 围成的矩形区域,

则 $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy=$________.

三.计算题:(每小题 6 分,共 60 分)

1.求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

2.设函数 $y=e^{f(\sin 2x)}$,其中 $f(u)$ 可导,求 y'.

3. 设函数 $y=x^{\arcsin x}$,求 y'.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y)=xy$ 确定,试求 $\frac{dy}{dx}$.

5.计算 $\int\frac{x+(\arctan x)^2}{1+x^2}dx$.

6.计算 $\int_0^1\ln(2x+1)dx$.

7. 设函数 $z=xe^{-xy}+\sin(xy)$,求 dz.

8. 设 $u=f(x,xy)$ 具有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

9. 求函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的单调区间、极值.

10. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$ 围成的平面图形的面积以及该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

四、(8 分) 证明: $x \ge 0$ 时, $\ln(1+x) \ge \dfrac{\arctan x}{1+x}$.

五、(8 分) 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

六、(8 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

七. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1), |f''(x)| \le 1$.

证明: $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{(1+x)(1+x^2)-(1+x)}{(1+x^2)(1+x)^2}$$

$y' = 3x^2 - 3$

$y'' = 6x$