华侨大学 2009 年硕士研究生入学考试专业课试卷

（答案必须写在答题纸上）

招生专业 基础数学

科目名称 数学分析(B) 科目代码 727

一、求下列极限（共 24 分，每小题 8 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{12}x^4}{x^6}$.

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 16^{\frac{1}{n}}-4\cdot 8^{\frac{1}{n}}+1}{(2^{\frac{1}{n}}-1)^2}$.

3、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

二、(15 分)用 $\varepsilon-\delta$ 语言写出函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 上不一致连续的定义，并证明：区间 $(a,\ b)$ 上的连续函数为一致连续的充要条件是 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 均存在.

三、(10 分) 求函数 $y=f(x)=\mathrm{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$ 的间断点并判断其类型.

四、计算下列积分（共 18 分，其中第一小题 8 分，第二小题 10 分）

1. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}\,dx$.

2. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

五、(10 分) 确定常数 a, b 的值，使函数函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\ln(a+b+x^2), & x>0.\end{cases}$ ，在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内处处可导，并求出它的导函数.

六、(15 分)证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，但对任何 x 并非绝对收敛，

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^2\frac{1}{(1+x^2)^n}$ 虽在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛，但并不一致收敛.

七、(10 分)求 $I=\iint\limits_S yzdzdx$，其中 S 为椭球 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 的上半表面的外侧.

八、(10 分)在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点的法线垂直于平面 $x+3y+z=9$，并写出此法线方程.

九、(10 分)在区间 $(-\pi,\pi)$ 中展开函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 成 $Fourier$ 级数，并利用它求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

十、(10 分)计算 $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$，其中 C 为域 $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\sin x$ 的正方向的围线.

十一、(8 分)设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=0$，证明：对任意的 $x>0$，存在 ξ，$0<\xi<x$，使得 $f'(x)-\frac{f(x)}{x}=\xi f''(\xi)$.

十二、(10 分)叙述实数理论中 $Weierstrass$ 聚点定理的内容，然后利用有限覆盖定理证明该定理.