华侨大学 2011 年硕士研究生入学考试专业课试卷

（答案必须写在答题纸上）

招生专业＿＿＿基 础 数 学＿＿＿

科目名称＿＿＿高等代数（B）＿＿＿科目代码＿＿825＿＿

一、（本题满分 20 分）

设 $p(x)$ 是 $F(x)$ 中次数大于零的多项式．证明：$p(x)$ 不可约的充分必要条件是对于任意 $f(x)\in F(x)$，或者 $(p(x),f(x))=1$，或者 $p(x)\mid f(x)$．

二、（本题满分 20 分）

设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$，其中 $a\neq b$．

证明：$D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$．

三、（本题满分 20 分）

设二次型 $q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$，求正交矩阵 T，使得经过正交线性替换 $X=TY$ 后二次型 q 化为标准型．

四、（本题满分 20 分）

设 ξ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的一个解，$\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 是导出组 $AX=0$ 的一个基础解系．证明：

（1） $\xi,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关；

（2） $\xi, \xi+\eta_1, \cdots, \xi+\eta_{n-r}$ 线性无关．

五、（本题满分 20 分）

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 A 的秩为 r 的充分必要条件是存在 $m\times r$ 矩阵 P 和 $r\times n$ 矩阵 Q 使得 $A=PQ$，并且 P 和 Q 的秩都为 r．

六、（本题满分 20 分）

设数域 F 上的 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，V_1 和 V_2 分别是齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $(A-E)X=0$ 的解空间，其中 E 是 n 阶单位矩阵．证明：$F^n=V_1\oplus V_2$．

七、（本题满分 15 分）

设 σ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换，α 是 V 中的单位向量．证明：

（1） $|\sigma(\alpha)|^2 \le |\sigma^2(\alpha)|$；

（2） $|\sigma(\alpha)|^2 = |\sigma^2(\alpha)|$ 当且仅当 α 是 σ^2 的属于特征值 $|\sigma(\alpha)|^2$ 的特征向量．

八、（本题满分 15 分）

设 σ_1,σ_2 是数域 F 上 n 维向量空间 V 上的两个线性变换．证明：$\mathrm{Im}(\sigma_2)\subseteq \mathrm{Im}(\sigma_1)$ 的充分必要条件是存在 V 上的线性变换 τ，使得 $\sigma_2=\sigma_1\tau$．