

华侨大学 2012 年硕士研究生入学考试专业课试卷

(答案必须写在答题纸上)

招生专业 基础数学

科目名称 数学分析 (A) 科目代码 723

1. (共 24 分, 每小题 8 分) 求下列极限.

(1). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$;

(2). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

(3). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

2. (15 分) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 连续, 证明: 若在 x_0 的某空心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有 $f(x) > g(x)$, 则 $f(x_0) \geq g(x_0)$.

3. (10 分) 设 $f(x)$, $g(x)$ 为定义在 D 上的有界函数, 满足 $f(x) \leq g(x)$, $x \in D$.

证明: $\inf_{x \in D} f(x) \leq \inf_{x \in D} g(x)$.

4. (共 18 分, 每小题 9 分) 计算下列积分.

(1). $\int \arctan(1+\sqrt{x}) dx$;

(2). $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

5. (10 分) 设 $g(0) = g'(0) = 0$,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

求 $f'(0)$.

6. (15分) 讨论积分的收敛性: $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$.

7. (10分) 计算积分 $\iint_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$, 其中 S 为由 $x=y=z=0$, $x=y=z=2$ 所围成立体的表面外侧.

8. (10分) 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使这点的切平面平行于平面

$$x+3y+z+9=0;$$

并写出这切平面和法线方程.

9. (10分) 确定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

10. (10分) 计算曲线积分 $\oint_L xdx + ydy + zdz$, 其中 L 为从 $(1, 1, 1)$ 到 $(2, 3, 4)$ 的直线段.

11. (8分) 设 $a > 0$, 证明函数 $f(x) = x^3 + ax + b$ 在实数集 R 上存在惟一的零点.

12. (10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且有斜渐近线, 即有数 b 与 c , 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - bx - c] = 0.$$

证明函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.