

安徽工业大学 2008 年招收攻读硕士学位研究生专业基础课试卷 (A)

科目名称: 常微分方程

代码: 844

一、填空题 (每小题 5 分, 本题共 25 分)

1. 一阶常微分方程的通解的图像是_____维空间上的一族曲线.
2. 二阶线性齐次微分方程的两个解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为方程的基本解组充分必要条件是_____.
3. 方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的基本解组是_____.
4. 一个不可延展解的存在在区间一定是_____区间.
5. 方程 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$ 的常数解是_____.

二、单项选择题 (每小题 5 分, 本题共 25 分)

6. 方程 $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{3}} + y$ 满足初值问题解存在且唯一定理条件的区域是 ().
(A) 上半平面 (B) xOy 平面 (C) 下半平面 (D) 除 y 轴外的全平面
7. 方程 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + 1$ () 奇解.
(A) 有一个 (B) 有两个 (C) 无 (D) 有无数个
8. $f(y)$ 连续可微是保证方程 $\frac{dy}{dx} = f(y)$ 解存在且唯一的 () 条件.
(A) 必要 (B) 充分 (C) 充分必要 (D) 必要非充分
9. 二阶线性非齐次微分方程的所有解 ().
(A) 构成一个 2 维线性空间 (B) 构成一个 3 维线性空间
(C) 不能构成一个线性空间 (D) 构成一个无限维线性空间
10. 方程 $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ 过点 $(0, 0)$ 有 ().
(A) 无数个解 (B) 只有一个解 (C) 只有两个解 (D) 只有三个解

三、计算题 (每小题 10 分, 本题共 50 分)

求下列方程的通解或通积分:

11. $\frac{dy}{dx} = y \ln y$
12. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$
13. $\frac{dy}{dx} = y + xy^5$
14. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

15. $y = xy' + 2(y')^3$

四、计算题（每小题 10 分，本题共 20 分）

16. 求方程 $y'' - 5y' = -5x^2$ 的通解.

17. 求下列方程组的通解.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \frac{1}{\sin t} \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

五、证明题（每小题 15 分，本题共 30 分）

18. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 求证: 方程

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

的一切解 $y(x)$, 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

19. 在方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 中, $p(x), q(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 求证: 若 $p(x)$ 恒不为零, 则该方程的任一基本解组的朗斯基行列式 $W(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的严格单调函数.