

中国科学技术大学
2010 年硕士学位研究生入学考试试题
(量子力学)

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

☐ 需使用计算器

☐ 不使用计算器

1, (20 分)

质量为 μ 的粒子限制在一维区域 $0 < x < a$ 内运动, $t=0$ 时 处于波函数 $\psi(x) = A[1+2b \cos(\pi x/a)]\sin(\pi x/a)$ (A, b 为常量) 描述的状态, 求 t 时刻粒子的

(1) 波函数; (2) 平均能量; (3) 动量平均值。

2, (20 分)

质量为 μ 的粒子被一维势垒

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \dots x < 0; x > a \\ V_0 & \dots 0 < x < a \end{cases}$$

散射。当粒子的能量到达某些值时, 粒子能全部穿过。求此时粒子的能量。

3, (30 分)

一个系统处于用轨道角动量态

$$\psi = Y_{00} + bY_{11}$$

描写的状态中, 其中 Y_{00} 和 Y_{11} 为轨道角动量的平方 \hat{L}^2 和其 z 分量 \hat{L}_z 的共同本征态, b 为常数, 求在此态中测量角动量 x 分量 \hat{L}_x 的可能值和相应概率。

4, (20 分)

已知电子某时刻的波函数为 $\Psi(\vec{r}, s_z) = \psi_1(r, \theta, \varphi)\chi_{\uparrow} + \psi_2(r, \theta, \varphi)\chi_{\downarrow}$, 其中

ψ_1 、 ψ_2 为电子空间波函数, χ_{\uparrow} 、 χ_{\downarrow} 分别为自旋沿正 z 轴与负 z 轴的归一化自旋波函数。试写出

(1) 电子自旋沿正 z 轴且在薄球壳 $(r, r+dr)$ 中出现的概率;

(2) 电子自旋沿负 z 轴且在 (θ, φ) 方向立体角元 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 中的概率;

(3) 电子自旋沿正 z 轴的概率。

5, (30 分)

一个自旋 $\hbar/2$ 的带电粒子处于某一均匀恒定磁场中, 其 Hamilton 量为

$$H = \frac{\hbar\omega}{5}(3\sigma_z + 4\sigma_x)$$

其中 ω 为常量, σ_z 、 σ_x 是 Pauli 矩阵。

(1) 求该粒子的能级以及相应的能量本征态;

(2) 已知 $t=0$ 时粒子自旋沿正 z 轴, 求此后任意时刻的粒子态以及其能量期望值;

(3) 计算 $t>0$ 时粒子自旋沿负 z 轴的概率。

6, (30 分)

一个二维谐振子的 Hamilton 量为 $H_0 = \frac{1}{2\mu}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2 + y^2)$, 其

中 μ 为质量, ω 为频率。现该谐振子又受到一微扰 $V(x, y) = \varepsilon\mu\omega^2 xy$ 作用, 其中 ε 是正的常数, $\varepsilon \ll 1$ 。试求解该体系的基态能量与波函数[若采用微扰法, 则波函数只要求计算到一级微扰, 能量只要求计算到二级微扰]。