中国科学技术大学

2012年硕士学位研究生入学考试试题

（数学分析）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

☐ 需使用计算器　　　☑ 不使用计算器

1. (15 分) 在下面三个问题中，如果答案是肯定的，请举出相应的例子；如果答案是否定的，请给出证明.

   (i) 是否存在两个发散的正数列，它们的和是一个收敛数列?

   (ii) 是否存在 $[a,b]$ 上不恒等于 0 的连续函数，它在 $[a,b]$ 中的有理点处都取 0 值?

   (iii) 是否存在这样的数列 $\{a_n\}$，它满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0 \quad 但是 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\max\{a_1,\ldots,a_n\}}{n}\neq 0?$$

2. (15 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=a,\quad \lim_{n\to\infty}a_{2n}=b.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=\frac{a+b}{2}.$$

3. (15 分) 函数

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{t}\ln\left(\frac{t-1}{32}\right)dt,\quad x\in(1,+\infty)$$

在何处取最小值?

4. (15 分) 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上可微，且 $f'(x)=O(x)$, $x\to+\infty$. 证明: $f(x)=O(x^2)$, $x\to+\infty$.

5. (15 分) (i) 把周期为 2π 的函数

$$f(x)=\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2, \qquad (0\le x\le 2\pi)$$

展开为 Fourier 级数.

(ii) 利用上面的级数, 计算下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

(iii) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 的和.

6. (15 分)

(i) 计算幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+1)3^n x^n$ 的和.

(ii) 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}e^{-nx^2}$$

当 $\alpha>2$ 时在 $(0,+\infty)$ 中一致收敛.

7. (15 分) 设 $z=f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的二阶偏导数, 且满足方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

试确定 a 的值, 使得在变换

$$\xi=x-2y, \quad \eta=x+ay \quad (a\ne -2)$$

下方程 (1) 被简化为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0,$$

并由此求偏微分方程 (1) 的解.

8. (15 分) 设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域, f 在 D 上连续且有偏导数. 如果在 D 上有

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=f, \qquad f|_{\partial D}=0 \quad (\partial D\text{记}D\text{的边界}).$$

证明 f 在 D 上恒等于 0.

9. (15 分) (i) 计算

$$\iiint\limits_V \sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz,$$

其中 V 是 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为中心, a 为半径的球.

(ii) 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中不通过原点的光滑封闭曲面, S 上点 P 处的外单位法向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 试就原点在 S 所包围区域的外部或内部两种情形计算曲面积分

$$\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}d\sigma,$$

其中 a,b,c 都是正数.

10. (15 分) 设 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是一个单调增加的函数. 如果

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(2t)}{f(t)}=1,$$

证明: 对任意 $m>0$ 都有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(mt)}{f(t)}=1.$$