

中国科学技术大学
2012年硕士学位研究生入学考试试题
(高等数学单考)

所有试题答案写在答题纸上, 答案写在试卷上无效

☐ 需使用计算器 ☒ 不使用计算器

一、选择题(每小题6分, 共30分, 每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的, 把所选项的字母填在答题纸上)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处_____.

- (A) 即不连续也不可微 (B) 连续但不可微
(C) 连续且可微 (D) 可微但不连续

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $d(\int f(x)dx) = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) $f(x)$ (B) $f(x)dx$ (C) $f'(x)$ (D) $f'(x)dx$

3. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数, 满足 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, 则点 x_0 是 $f(x)$ 的_____.

- (A) 可能的拐点 (B) 拐点
(C) 极大值点 (D) 极小值点

4. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ _____.

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 不能确定

5. 微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解是_____.

- (A) $y = C \sin x$ (B) $y = C \cos x$
(C) $y = C \sin x + C \cos x$ (D) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

二、填空题(每小题6分, 共30分, 把答案填在答题纸上)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 曲线 $y = 3x^2 + 6x + 5$ 单调上升的区间是_____.

3. 设 $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t dt$, 则 $F'(x) =$ _____.

4. 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 的法线方程为 _____.

5. 设 $z = e^{xy}$, 则 z 的全微分 $dz =$ _____.

三、(本题10分) 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

四、(本题10分) 计算定积分 $\int_0^1 x \sin x dx$.

五、(本题10分) 设 $y = x^2 \cos x$, 求 $y^{(20)}$.

六、(本题10分) 设 $z = f(\ln x + \frac{1}{y})$, 其中 f 是可微函数, 求证:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

七、(本题10分) 求函数 $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$ 的极值.

八、(本题10分) 计算二重积分 $\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中区域 D 是

圆盘 $x^2 + y^2 \leq R^2$.

九、(本题10分) 求微分方程 $y'' - 4y = e^x$ 的通解.

十、(本题10分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛区间及和函数.

十一、(本题10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上有二阶导数, 且 $f''(x) = e^x f(x)$, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为零.