中国科学技术大学

2012年硕士学位研究生入学考试试题

（高等数学B）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

□需使用计算器　　　　□不使用计算器

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} =$_____①_____

2. 设 $f(x)=\begin{cases} 2e^{x}, & x<0 \\ a+x, & x\geq 0 \end{cases}$，若$f(x)$在$x=0$处连续，则$a=$___②___

3. 设$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$，则$\frac{dy}{dx}=$_____③_____

4. 微分方程$(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$的通解是_____④_____

5. 函数$f(x)=\cos 2x$在$x=0$处的麦克劳林级数是_____⑤_____

6. 设$f(x)=\int_1^{\sin x} e^{-t^2}dt$，则$f''(x)=$_____⑥_____

二．单项选择题 （每小题 4 分，共 24 分）

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$（　　）

（A）一定收敛且和为 0；　（B）一定收敛，但和不一定为 0；
（C）一定发散；　　　　　（D）可能收敛，也可能发散

2. 函数$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$在$x=0$的导数$f'(0)=$（　　）

（A）1　　（B）0　　（C）-1　　（D）不存在

3. 设当$x \to 0$时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$都是无穷小量，则$\alpha(x)\beta(x)$（　　）

（A）是比$\alpha(x)$高阶的无穷小量；　　（B）与$\alpha(x)$是同阶无穷小量

（C）可能是$\alpha(x)$的高阶无穷小量也可能是同阶无穷小量

（D）与$\alpha(x)$，$\beta(x)$中阶数较高的那个同阶

4. $I = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2} d\sigma$，$D: x^2+y^2 \leq 1$，化为极坐标形式是（　　）

（A）$I = \int_0^{2\pi} [\int_0^1 e^{-r^2} dr] d\theta$　　（B）$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\int_0^1 e^{-r^2} dr] d\theta$

（C）$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\int_0^1 e^{-r^2} r dr] d\theta$　　（D）$I = \int_0^{2\pi} [\int_0^1 e^{-r^2} r dr] d\theta$

5. 曲面$xyz = 1$上平行于平面$x+y+z+3=0$的切平面方程是（　　）

（A）$x+y+z-3=0$　（B）$x+y+z+1=0$

（C）$x+y+z-2=0$　（D）$x+y+z=0$

6. 设$z = \ln\sqrt{1+x^2+y^2}$，则$dz|_{(1,1)} =$（　　）

（A）$\frac{1}{3}(dx+dy)$　　（B）$dx+dy$

（C）$\sqrt{3}(dx+dy)$　　（D）$\frac{1}{2}(dx+dy)$

三.（10 分）已知$f(x)$的一个原函数为$x^2\ln x$，求$\int xf'(x)dx$

四.（12 分）求$y = \sqrt{x}\ln x$在$(0,+\infty)$上的最小值。

五.（13 分）设$f(x) = \frac{1}{2x^2-3x+1}$，试将$f(x)$展成$x$的幂级数，并指出其收敛区间

六.（13 分）设$z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f,\varphi$具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

七.（14 分）

求$\iint\limits_S (e^{yz}+x^2yz)dydz+(\cos(x^2z)-xy^2z)dzdx+(\sin(x^3y^2)+xyz)dxdy$，$S$为四面体$x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0,x+y+z\le 1$的外侧表面

八.（14 分）求微分方程$y''-6y'+9y=(x+1)e^{2x}$的通解。

九.（10 分）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0,f(\frac{1}{2})=1$，证明：对于任意的实数$\lambda$，一定存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)-\lambda f(\xi)+\lambda\xi=1$

十.（8 分）函数$f(x)$在$[0,1]$上单调减，证明：对于任何$\alpha\in(0,1)$, $\int_0^\alpha f(x)dx\ge\alpha\int_0^1 f(x)dx$

十一.(8 分)设$a_n>0$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散