浙江工业大学

2008 攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：（830）高等代数　　共 2 页

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。 ★★★★

1、（15 分）证明n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.\quad (a\neq b).$$

2、（15 分）设$f(x),g(x)$为数域F上多项式，若$d(x)|f(x),d(x)|g(x)$，且$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个线性组合，证明$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式.

3、（15 分）设向量组$B:\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\cdots,\overrightarrow{\beta_r}$可经向量组$A:\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_s}$线性表示为

$$(\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\cdots,\overrightarrow{\beta_r})=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_s})K,$$

且向量组$\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_s}$线性无关，证明向量组$B:\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\cdots,\overrightarrow{\beta_r}$线性无关的充分必要条件是矩阵$K$的秩为$r$.

4、（15 分）当a,b取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

有解？在有解的情形求出所有解。

5、（15 分）已知三阶方阵$\boldsymbol{B}$的特征值分别为 1、2、−1，又$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^3-2\boldsymbol{B}$，（1）求方阵$\boldsymbol{A}$的特征值及其相似对角阵；（2）求行列式$|\boldsymbol{A}|$和$|\boldsymbol{B}^2+2I|$.

6、（15 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$可经正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$化为标准型$f(y_1,y_2,y_3)=y_2^2+4y_3^2$，求参数$a,b$的值及正交阵$\boldsymbol{P}$.

7、（15 分）已知数域$\boldsymbol{P}$上一个n阶矩阵$\boldsymbol{A}$是若当阵，证明$\boldsymbol{A}$与它的转置阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$相似。

8、（15 分）设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为两个$n$阶正交矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}^{-1}$的行向量构成$n$维欧氏空间$\mathrm{R}^n$的标准正交基.

9、（15 分）设$\overrightarrow{\alpha_1}=(1,2,-1,-2)^T$，$\overrightarrow{\alpha_2}=(3,1,-1,1)^T$，$\overrightarrow{\alpha_3}=(-1,0,1,-1)^T$，$\overrightarrow{\beta_1}=(2,5,-1,-5)^T$，$\overrightarrow{\beta_2}=(-1,2,-2,3)^T$. 由$\overrightarrow{\alpha_i}(i=1,2,3)$生成的子空间记为$W_1$，由$\overrightarrow{\beta_j}(j=1,2)$生成的子空间记为$W_2$.

(1) 求$W_1\cap W_2$的维数; (2) 求$W_1\cap W_2$的一组基.

10、（15 分）设n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定，$\boldsymbol{B}$为$m\times n$阶实矩阵，$\boldsymbol{B}^T$是$\boldsymbol{B}$的转置阵，证明$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$为正定阵的充分必要条件是矩阵$\boldsymbol{B}$的秩为$n$.