

★★★★ 答题一律做在答题纸上, 做在试卷上无效。★★★★

一、填空 (共 30 分, 每题 5 分)

1. 在 $x \gg 1$ 条件下, 为改善计算精度可以等价变形 $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ 为_____.

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{\text{作 } k \text{ 次 } \sqrt{}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. n 次多项式 $P(x)$ 的 k 阶差商 $P[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]$, 当 $k \leq n$ 时是一个_____次多项式.

5. 辛普生公式 $S(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$ 具有_____次代数精度.

6. 常微分方程初值问题的梯形公式求解方法具有_____阶精度。

二、计算分析题 (共 120 分, 每题 15 分)

1. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系 $x_n = 10x_{n-1} - 1$, $n = 1, 2, \dots$ 若 $x_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$, 计算到 x_{10} 时误差有多大? 这个计算过程稳定吗?

2. 采用 Lagrange 插值法, 以 $\sqrt{100} = 10, \sqrt{121} = 11, \sqrt{144} = 12$ 计算 $\sqrt{115}$ 并估计误差.

3. 确定参数 a, b, c, d, e 的关系, 使得函数 $s(x)$ 是 3 次样条函数

$$s(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in (-\infty, 1), \\ c(x-2)^2, & x \in (1, 3), \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3, & x \in [1, +\infty), \end{cases}$$

为使函数 $s(x)$ 满足条件

$$s(0) = 26, s(1) = 7, s(4) = 25$$

求参数 a, b, c, d, e .

4. 设 $f(x) = 0$ 的单根 α , $x = F(x)$ 是 $f(x) = 0$ 的等价方程, 则 $F(x)$ 可表示为
- $$F(x) = x - m(x)f(x)$$

证明: 当 $m(a) \neq [f'(\alpha)]^{-1}$ 时, 相应迭代法为一阶的; 当 $m(a) = [f'(\alpha)]^{-1}$ 时, 相应的迭代法至少是二阶的.

5. 证明给定线性方程组雅可比迭代发散.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

6. 用最小二乘求一个形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式, 使它与以下数据拟合:

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

7. 确定下式中的待定参数, 使其代数精度尽可能高, 并指明求积公式所具有的代数精度.

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$$

8. 取步长 $h = 0.4$ 写出用标准的 4 阶龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}xy^{-2}, 0 \leq x \leq 1.2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的计算公式并计算 $y(0.4)$ 的近似值.