★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

1、(15分) 设$f(x),g(x)$为数域$\mathbf{F}$上多项式，证明：如果$(f(x),g(x))=1$，那么有$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

2、(15分) 设向量$\vec{\beta}$可由向量组$A:\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_s}$线性表示，证明：其表示法唯一的充分必要条件是向量组$\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_s}$线性无关.

3、(15分) 如果矩阵的列（行）向量组是线性无关的，就称该矩阵为列（行）满秩的. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$阶矩阵，证明：矩阵$\boldsymbol{A}$是列满秩的充分必要条件为存在m阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. 这里$\boldsymbol{E}_n$为$n$阶单位矩阵.

4、(15分) 求一个四元齐次线性方程组，使它的基础解系为:

$$\vec{\xi_1}=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\quad \vec{\xi_2}=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

5、(15分) 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$阶矩阵，若线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有唯一解，证明：矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$为可逆矩阵.

6、(15分) 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)^{\mathrm{T}}$均为非零向量且满足$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，而$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$为$n$阶矩阵,

（1）求矩阵$\boldsymbol{A}^2$；

（2）求$\boldsymbol{A}$的特征值及其全部特征向量.

7、(15分) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$,

（1）当该二次型的秩为2时求参数k的值;

（2）求出该二次型对应矩阵的特征值;

（3）用正交变换把该二次型化为标准型.

8、（15 分）求证：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n-1} & a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{1n} & \cdots & a_{11}+\cdots+a_{1n-2}+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n-1} & a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2n} & \cdots & a_{21}+\cdots+a_{2n-2}+a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn-1} & a_{n2}+a_{n3}+\cdots+a_{nn} & \cdots & a_{n1}+\cdots+a_{nn-2}+a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

9、（20 分）设 $\boldsymbol{T}$ 为 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的一个变换，若它保持向量的内积不变，即对任意 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 有 $(\boldsymbol{T}\vec{\alpha},\boldsymbol{T}\vec{\beta})=(\vec{\alpha},\vec{\beta})$，证明：$\boldsymbol{T}$ 为一个线性变换 .

10、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，λ_1,λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，$\boldsymbol{V}_{\lambda_1}$，$\boldsymbol{V}_{\lambda_2}$ 分别是对应于 λ_1,λ_2 的特征子空间，试证：$\boldsymbol{V}_{\lambda_1}+\boldsymbol{V}_{\lambda_2}$ 是直和.