杭 州 师 范 大 学

2009 年招收攻读硕士研究生入学考试题

考试科目代码： 714

考试科目名称： 数学分析

说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；
4、
5、

一、选择题：（每小题 6 分，共 30 分）

1、 $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\sin\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\sin(x-1)}{1-x}\right]=$（　　　）

A、0；　**B**、1；　**C**、-1；　**D**、2；　**E**、-2

2、已知 $f'(x)=1$，$f(0)=0$，**则** $\int f(x)dx=$（　　　）

A、$\dfrac{x^2}{2}$；　**B**、$\dfrac{x^2}{2}+C$；　**C**、x^2；　**D**、x^2+C

3、函数 $z=f(x,y)$ **的偏导数** f'_x **及** f'_y **在点** (x,y) **存在且连续是** $f(x,y)$ **在该点可微的**

（　　　）

A、充分非必要条件；B、必要非充分条件；C、充分必要条件；D、无关条件

4、曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ **在点** $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ **处的切平面方程为**（　　　）

A、$2x-y+z=\pi$；　**B**、$x+y+2z=\dfrac{\pi}{2}$；　**C**、$x+y-2z=\pi$；**D**、$x-y+2z=\dfrac{\pi}{2}$

5、下列级数中绝对收敛的是（　　　）

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$；**B**、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n!}$；**C**、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1}$；**D**、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

二、计算下列各题：（每小题 6 分，共 30 分）

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

2、$\int_C (1+\sin y)dx + x\cos y dy$，其中 C 为曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$，$0\le t\le 1$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$

3、$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$

4、$\int_L x^2 ds$，其中 L 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

5、$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

三、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：对任意 $\lambda\in R$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$.

四、（10 分）已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\ge g(x)$，证明 $A\ge B$.

五、（10 分）证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导数.

六、（10 分）求由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$，平面 $z=0$ 及圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的立体体积.

七、（12 分）讨论广义积分 $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^{\alpha}}dx$ 的敛散性.

八、（12 分）求和函数 $S(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+\cdots+n(n+1)x^n+\cdots$

九、（12 分）设 $a>0$，$\sigma>0$，$a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sigma}{a}\right)$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right)$，$n=1,2,3,\cdots$. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且其极限为 $\sqrt{\sigma}$.

十、（14 分）设函数列 $f_n(x)=\frac{ne^x}{1+n+x}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，

（1）证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ 的值.

杭 州 师 范 大 学

2009 年招收攻读硕士研究生入学考试题(参考答案)

考试科目代码： 714

考试科目名称： 数学分析

一、选择题：（每小题 6 分，共 30 分）

1、（ C ）； 2、（ B ）； 3、（ A ）； 4、（ D ）； 5、（ B ）

二、计算下列各题：（每小题 6 分，共 30 分）

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

解：因为 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$，$x\to\infty$， ……（3 分）

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$ （6 分）

2、$\int_C(1+\sin y)dx+x\cos ydy$，**其中** C **为曲线** $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}$，$0\le t\le 1$ **从** $(0,0)$ **到** $(1,1)$

解：设 $P(x,y)=1+\sin y$，$Q(x,y)=x\cos y$，**则** $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\cos y$，

所以此积分与路径无关，从而有 ……（3 分）

$$\int_C(1+\sin y)dx+x\cos ydy=\int_0^1(1+\sin 0)dx+\int_0^1 1\cdot\cos ydy=1+\sin 1$$ ……（6 分）

3、$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$

解：令 $t=\arcsin x$，**则** $x=\sin t$，$dx=\cos tdt$，**于是我们有** ……（2 分）

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\cos^3 t}\cdot\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\sec^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}td(\tan t)$$

$$=t\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t dt=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-d(\cos t)}{\cos t}=\frac{\pi}{4}+\ln\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$ **（6 分）**

4、 $\int_L x^2 ds$ **，其中** L **为圆周** $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$

解：由对称性，有 $\int_L x^2 ds=\frac{1}{3}\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\frac{a^2}{3}\int_L ds=\frac{2}{3}\pi a^3$ **…（6 分）**

5、 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

解： $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\arcsin\sqrt{x}d\sqrt{x}=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-2\int\sqrt{x}d\arcsin\sqrt{x}$ **…（3 分）**

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}}$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$$ **……（6 分）**

三、（10 分）设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **连续，在** (a,b) **可导，且** $f(a)=f(b)=0$ **，证明：对任意** $\lambda\in R$ **，存在** $\xi\in(a,b)$ **，使得** $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$ **.**

证明：构造辅助函数 $F(x)=f(x)e^{\lambda x}$ **，则由** $f(x)$ **所满足的已知条件意知，有** $F(x)$ **在** $[a,b]$ **连续，在** (a,b) **可导，且** $F(a)=F(b)=0$ **，于是** $F(x)$ **在** $[a,b]$ **上满足 Rolle 定理的条件，故存在** $\xi\in(a,b)$ **，使得** $F'(\xi)=0$ **，即** $F'(\xi)=\left(f'(\xi)+\lambda f(\xi)\right)e^{\lambda\xi}=0$ **，进而有** $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$ **.** **……（10 分）**

四、（10 分）已知 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ **，** $\lim_{x\to x_0}g(x)=B$ **，且存在** $\delta>0$ **，当** $0<|x-x_0|<\delta$ **时，有** $f(x)\ge g(x)$ **，证明** $A\ge B$ **.**

证明：假设相反， $A<B$ **. 由于** $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ **，** $\lim_{x\to x_0}g(x)=B$ **，所以对于** $\varepsilon=\frac{B-A}{2}>0$ **，存在** $\delta>0$ **，当** $0<|x-x_0|<\delta$ **时，有**

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\qquad |g(x)-B|<\varepsilon$$ **……（6 分）**

即 $\frac{3A-B}{2}<f(x)<\frac{A+B}{2}$ **，** $\frac{A+B}{2}<g(x)<\frac{3B-A}{2}$ **，从而** $f(x)<g(x)$ **. 此与已知矛盾，故必有** $A\ge B$ **.** **……（10 分）**

五、（10 分）证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **上有连续的导数.**

解：因为 $\left|\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'\right|=\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ **，** $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ **，而** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **收敛，**

所以由 M -判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. ……（6 分）

又 $\frac{\cos nx}{n^2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导数.

……（10 分）

六、（10 分）求由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$，平面 $z=0$ 及圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的立体体积.

解：由对称性有 $V=\iint\limits_D \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R\frac{h}{R}r^2dr=\frac{2}{3}\pi hR^2$ …（10 分）

七、（12 分）讨论广义积分 $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^{\alpha}}dx$ 的敛散性.

解：$\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^{\alpha}}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^{\alpha}}dx+\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^{\alpha}}dx=I_1+I_2$

对于 I_1，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha-1}\cdot\frac{\arctan x}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{x}=1$，所以当 $\alpha-1<1$，即 $\alpha<2$ 时 I_1 收敛，而当 $\alpha-1\geq 1$，即 $\alpha\geq 2$ 时 I_1 发散. ……（6 分）

对于 I_2，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\cdot\frac{\arctan x}{x^{\alpha}}=\frac{\pi}{2}$，所以当 $\alpha>1$ 时 I_2 收敛，而当 $\alpha\leq 1$ 时 I_2 发散.

综上，当且仅当 $1<\alpha<2$ 时广义积分 $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^{\alpha}}dx$ 收敛. ……（12 分）

八、（12 分）求和函数 $S(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+\cdots+n(n+1)x^n+\cdots$

解：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的收敛半径 $R=1$，收敛区间是 $(-1,1)$，当 $|x|<1$ 时，

$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，令 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$， ……（4 分）

则 $\int_0^x g(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^x t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-1=\frac{1}{1-x}-1\ (|x|<1)$$ ……（8 分）

所以 $g(x)=\int_0^x g(t)dt=\frac{1}{(1-x)^2}$，$\int_0^x S(t)dt=x^2g(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$，进而

$S(x)=\left(\int_0^x S(t)dt\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}\ (|x|<1)$. ……（12 分）

九、（12 分）设 $a>0$，$\sigma>0$，$a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sigma}{a}\right)$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right)$，$n=1,2,3,\cdots$.

证明：数列$\{a_n\}$收敛，且其极限为$\sqrt{\sigma}$.

证明：$\forall n$，**有** $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n}\cdot\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{a_n}}=\sqrt{\sigma}$

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sigma}{a}\right)\geq\sqrt{a}\cdot\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\sigma}$$

所以数列$\{a_n\}$有下界. ……（4分）

又$\forall n$，**由**$a_n\geq\sqrt{\sigma}$**可得**$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right)=\frac{a_n}{2}\left(1+\frac{\sigma}{a_n^2}\right)\leq\frac{a_n}{2}\left(1+\frac{\sigma}{\sigma}\right)=a_n$

即数列$\{a_n\}$单调下降. ……（8分）

由单调有界原理知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$**存在，设**$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$**，在**$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right)$**两端令**

$n\to\infty$ **得，**$\xi=\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{\sigma}{\xi}\right)$**，解得**$\xi=\pm\sqrt{\sigma}$**，舍去负根（因为**$a_n>0$**），故得**

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{\sigma}$ ……（12分）

十、（14分）设函数列$f_n(x)=\frac{ne^x}{1+n+x}\ (n=1,2,3,\cdots)$，

（1）证明函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛；

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$的值.

解：（1）$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=e^x$ ……（3分）

$\forall x\in[0,1]$，**有**

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\frac{ne^x}{1+n+x}-e^x\right|=\frac{(1+x)e^x}{1+n+x}<\frac{(1+x)e^x}{n}\leq\frac{2e}{n}\to 0(n\to\infty)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$**，所以函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛.** …（8分）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty 0}f_n(x)dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1$ ……（14分）