

杭 州 师 范 大 学

2010 年招收攻读硕士研究生入学考试题

考试科目代码: 814

考试科目名称: 高等代数

- 说明: 1、命题时请按有关说明填写清楚、完整;
2、命题时试题不得超过周围边框;
3、考生答题时一律写在答题纸上, 否则漏批责任自负;
4、
5、

1、(15 分) 设 α 是有理数域上的不可约多项式 $f(x)$ 的根, 求证: 对非 1 任意有理数 r , $f(r\alpha) \neq 0$ 。

2、(15 分) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3、(20 分) 设 A 是 $n \times (n+1)$ 矩阵, I_n 是 n 阶单位矩阵, 证明: 存在 $(n+1) \times n$ 矩阵 B 使 $AB = I_n$ 成立的充分必要条件是秩 $A = n$ 。

杭州师范大学硕士研究生入学考试命题纸

4、(20 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 令 $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \dots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$, 其中 t_1, t_2 为数。试问 t_1, t_2 满足何关系时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也是方程组 $AX=0$ 的一个基础解系。

5、(20 分) 设 A 为 n 阶矩阵且 $A^2 - 4A + 3I_n = 0$, 这里 I_n 为 n 阶单位矩阵。求可逆阵 T 使 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

6、(20 分) 设 W_1, W_2 为数域 F 上的 n 维向量空间 V 的两个非零子空间, 且维数 $\dim(W_1) + \dim(W_2) = n$ 。求证: V 上存在线性变换 σ 使

$$\sigma^{-1}(0) = W_1, \sigma(V) = W_2。$$

7、(20 分) 设 A, B 是正定矩阵, 已知矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解 $X = D$, 求证 D 是正定矩阵。

8、(20 分) 设 A, B, AB 均为 n 阶实对称矩阵, λ 为 AB 的任一个特征值, 求证存在 A 的一个特征值 s 和 B 的一个特征值 t 使 $\lambda = st$ 。