

# 杭 州 师 范 大 学

## 2011 年招收攻读硕士研究生入学考试试题

考试科目代码: 726

考试科目名称: 量子力学

- 说明: 1、命题时请按有关说明填写清楚、完整;  
2、命题时试题不得超过周围边框;  
3、考生答题时一律写在答题纸上, 否则漏批责任自负;  
4、  
5、

### 一、填空题 (每空 3 分, 共 30 分)

1. 写出含时薛定谔方程\_\_\_\_\_。
2. 完成位置和对易关系:  $[x, \hat{p}_x] = \_\_\_\_\_\_$ , 其位置动量不确定关系的公式是\_\_\_\_\_。
3. 量子力学中力学量算符必须是\_\_\_\_\_算符, 以保证它的本征值为\_\_\_\_\_数。
4. 设  $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$  设为氢原子的能量本征函数, 完成下列积分:  
$$\int_V \psi_{nlm}^* \hat{L}_z \psi_{nlm} d\tau = \_\_\_\_\_\_, \quad \int_V \psi_{nlm}^* \hat{L}^2 \psi_{nlm} d\tau = \_\_\_\_\_\_。$$
5. 玻色子和费米子自旋的特点是\_\_\_\_\_, 费米子服从\_\_\_\_\_统计, 玻色子服从\_\_\_\_\_统计。

### 二、简答题 (每题 5 分, 共 30 分)

1. 叙述你对量子力学中微观波粒二象性概念的理解。
2. 叙述量子力学中物理量与厄米算符关系以及厄米算符与力学量测量值之间的关系。
3. 当量子体系的势能与时间无关时, 从薛定谔方程出发推导出定态薛定谔方程。
4. 量子力学中微观粒子的状态对应希尔伯特 (Hilbert) 空间的一个矢量, 叙述量子力学中的表象变换在希尔伯特空间对应什么?
5. 电子的自旋角动量有什么特点? 在  $S_z$  表象中, 写出自旋角动量三个分量的矩阵表示。
6. 什么是全同粒子, 叙述全同粒子波函数的性质。

## 三、计算题 (90 分)

1. (15 分) 设粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, x > a \end{cases} \text{ 中运动,}$$

求: (1), 求坐标的几率分布和几率最大的位置 (4 分);

$$(2), \text{ 证明 } \bar{x} = \frac{a}{2} \quad (4 \text{ 分});$$

$$(3), \text{ 证明 } (\Delta x)^2 = \frac{a^2}{12} \left(1 - \frac{6}{n^2 \pi^2}\right) \quad (4 \text{ 分});$$

$$(4), \text{ 求动量的平均值 } \bar{p} \quad (3 \text{ 分})$$

2. (10 分) 设氢原子处于状态

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{21}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) - \frac{1}{2} R_{31}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) - \frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}(r) Y_{1-1}(\theta, \varphi)$$

求: (1) 氢原子能量及其几率。 (4 分)

$$(2) \text{ 轨道角动量平方 } \hat{L}^2 \text{ 的可能值, 可能值出现的几率。 (4 分)}$$

$$(3) z \text{ 分量 } \hat{L}_z \text{ 的可能值, 可能值出现的几率以及 } \hat{L}_z \text{ 的平均值。 (2 分)}$$

3. (10 分) 证明: (1)  $\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x})$  是厄米算符: (5 分), (2)  $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = i$ 。 (5 分)4. (15 分) 角动量的定义  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , 其中  $\vec{r}, \vec{p}$  都是算符, 并且有  $L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ ,  $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$ 。证明如下的对易关系

$$(1) [L_x, L_y] = i\hbar L_z, [L_y, L_z] = i\hbar L_x, [L_z, L_x] = i\hbar L_y; \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) [L^2, \vec{L}] = 0; \quad (5 \text{ 分})$$

$$(3) [L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm}。 (5 \text{ 分})$$

5. (20 分) 设一量子体系的 Hamilton 量为  $H = H_0 + H'$  其中:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} \varepsilon & a & 2a \\ a & \varepsilon & 3a \\ 2a & 3a & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$0 < \varepsilon \ll 1, 0 < a \ll 1, E_1 \neq E_2 \neq E_3,$$

求在二级近似下的能量本征值。

杭州师范大学硕士研究生入学考试命题纸

6. (20 分) 设氦原子中的两个电子处于  $1s2p$  态, 两个电子的空间波函数分别为  $\psi_{100}(\vec{r}_1)$  和  $\psi_{210}(\vec{r}_2)$ 。

(i) 写出电子两个可能的空间波函数和四个可能的自旋波函数;

(ii) 写出两个电子交换反对称的总波函数(同时考虑空间自由度和自旋自由度)。