

中国计量学院 2007 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称: 高等代数

考试科目代码: 404

考 生 姓 名:

考 生 编 号:

考生须知:

- 1、所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。
- 2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。
- 3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共 十二 大题，共 二 页。

1、(12 分) 设 $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$ ，求 $f(x)$ 在复数域 C 中的所有根（需说明理由）。

2、(12 分) 设 P, F 是两个数域，且 $P \subseteq F$ 。证明：若 $f(x), g(x) \in P[x]$ ， $f(x) | g(x)$ ，则在 $F[x]$ 中，也有 $f(x) | g(x)$ 。

3、(12 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ， A_{ij} 是 A 的 (i, j) 元素所对应的代数余子式。

$$\text{求 } \sum_{i,j=1}^4 A_{ij}$$

4、(12 分) 计算 n 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ 1 & a_2 + a_1 & 0 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

5、(12 分) 设 A, B, C 是 R^n 中的三个向量组，其中 B 是 A 的极大无关组， C 是与 B 等价的无关组，问： C 是否是 A 的一个极大无关组，若是，请给出证明，若不是，请给出反例。

6、(12 分) 设 V 是实数域 R 上的线性空间， $(\alpha, \beta)_1, (\alpha, \beta)_2$ 为 V 上的两个内积。

试证： $(\alpha, \beta)_3 = (\alpha, \beta)_1 + (\alpha, \beta)_2$ 也是 V 上的一个内积。

7、(12 分) 设数字方阵 A 的初等因子为：

$$(\lambda-1), (\lambda+1), (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^2, (\lambda-1)^2$$

试求：(1) A 的不变因子；

(2) A 的行列式因子；

(3) A 的 Jordan 标准形；

(4) A 的最小多项式。

8、(12 分) 设矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

(1) 求出 A 的全部特征值和特征向量；

(2) 判断 A 能否相似对角化？若能相似对角化，请写出可逆矩阵 P 和对

角矩阵 Λ ，使 $PAP^{-1} = \Lambda$

9、(12 分) A, B 均为 n 阶正交矩阵，且 $|A| + |B| = 0$ 。证明： $|A + B| = 0$ 。

10、(12 分) 设 V 是一个 n 维欧氏空间， W 是 V 的子空间。

试证明：(1) 存在 V 的子空间 U ，使得 $V = W \oplus U$ ；

(2) W 有唯一的正交补。

11、(15 分) 每行每列有且仅有一个元素为 1 且其余元素为 0 的矩阵称为置换矩阵。试就置换矩阵，讨论其相关性质并给出相应的证明。

12、(15 分) 仿照线性方程组的解结构理论

(1) 给出 $A_{m \times n} X_{n \times s} = B_{m \times s}$ 有解的充要条件并说明理由；

(2) 给出矩阵方程 $A_{m \times n} X_{n \times s} = O_{m \times s}$ 的基础解系并说明理由；

(3) 在 $A_{m \times n} X_{n \times s} = B_{m \times s}$ 有解且 X_0 是其一特解情况下，给出其通解。

【完】