浙江师范大学 ZHEJIANG NORMAL UNIVERSITY

浙江师范大学 2005 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目：高等代数 报考学科、专业：基础数学 应用数学 运筹学与控制论

一、填空题(每小题 5 分，共 40 分)

1 当 a 取值______时，多项式 $x^6-x^4-x^2+a$ 以 -1 为其二重根.

2 已知线性变换的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+\lambda-1$，则 $A^n=$______.

3 若 n(≥2)阶矩阵 A，B，C，D 分别满足 $A^n=O(A\neq O)$，$B^2-B-2E=O$，$C^2=C$

$D^2-2D=-E$，则在复数域上，A，B，C，D 中必能与对角矩阵相似的矩阵是_____.

4 设 λ_1,λ_2 是线性变换的两个不同特征值，相应的特征子空间 V_1,V_2 的维数分别

是 n_1,n_2，则和空间 V_1+V_2 的维数是_________.

5 如果 4 阶矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^4-6\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$，且 A 的特征值是 4 个连续的整数，那么这 4 个特征值是________.

6 如果 A 是 n 阶正定矩阵，β 是 n 维实数列向量，那么当 a 满足_____时，矩阵

$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & a \end{pmatrix}$ 是正定矩阵。

7 在内积定义为 $(f(x),g(x))=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$ 的$[-\pi\ \pi]$上连续函数欧氏空间 $C_{[-\pi,\pi]}$ 中，1 与 sinx 的夹角是_______.

8 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，使 $\beta_1=\lambda\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+\lambda\alpha_2+\alpha_3$，

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\lambda\alpha_3$ 线性无关的 λ 的值是__________.

二、(15 分)已知 $(f(x),g(x))=1$，$(g(x),h(x))=1$，证明 $(f(x)g(x),\ f(x)h(x)+g(x))=1$.

浙江师范大学 2005 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目:高等代数 报考学科、专业: 基础数学 应用数学 运筹学与控制论

三、(15 分)如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + bx_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + ax_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - 3bx_3 + bx_4 + (a+2)x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间 W 是 3 维空间，试求 a, b 的值, 并求 W 的一组基. 解空间有可能是 2 维空间吗?

四、(10 分) 设 A 是 $P^{n\times n}$ 中矩阵,

(1) 证明矩阵 A 的所有多项式所成之集 W=$\{f(A)|f(x)\in P[x]\}$是 $P^{n\times n}$ 的子空间;

(2) 设 A 的最小多项式 m(λ)的次数是 m，求 W 的维数.

五、(15 分) a, b 满足何关系，二次型 $2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+ax_3^2+bx_2x_3$ 分别是正定的和半正定的二次型.

六、(10 分) 设 A 是 n 阶实数矩阵, n 是奇数, 证明:

(1) 若$|A|>0$, 则 A 有大于 0 的特征值;

(2) 若 A 是正交矩阵, 则 A 的特征值 λ_0 的模等于 1.

七、(20 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性空间 V 的一组基、$\alpha\in V, \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$

变换

$$\mathscr{A}\alpha = (x_2+x_3)\alpha_1 + (x_1+x_3)\alpha_2 + (x_1+x_2)\alpha_3$$

(1) 证明 $\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换;

(2) 写出 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A;

(3) 求矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 是一个对角矩阵.

浙江师范大学 2005 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目:高等代数 报考学科、专业: 基础数学 应用数学 运筹学与控制论

八、(10 分) 设 $n(\geq 2)$ 维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵 A 满足 $A^n=0$, $A^{n-1}\neq 0$, 证明核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数 $\dim\mathscr{A}^{-1}(0)$ = 秩(A^{n-1})= 1.

九、(15 分) 设 A , B 都是 n 阶矩阵, 其中 A 可逆, 证明 秩(A-B) ≥秩(A) - 秩(B). 并且等式成立当且仅当 $BA^{-1}B=B$.