



浙江师范大学 2005 年研究生

入学考试题

基础数学、应用数学

考试科目: 数学分析 报考学科、专业: 运筹学与控制论

一 (每小题 8 分, 共 48 分) 计算题

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}$.

2、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和.

3、求级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{1}{k(k+1)} \right)$ 的和.

4、求 $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$ 的值.

5、求极限 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^n$

6、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$

二 (14 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a ,

$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 用定义证明 $\{S_n\}$ 也收敛于 a .

第 1 页, 共 2 页



三 (20 分) 设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为二次可微函数,

$$u(x, y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$$

证明 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

四 (20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 证明

$$(1) \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

$$(2) \text{若 } f(x) \geq 0, x \in [0, \pi], \text{ 且 } \int_0^\pi f(x) dx = 0, \text{ 则 } f(x) \equiv 0, x \in [0, \pi].$$

五 (16 分) 若不定积分 $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^2(x-1)} dx$ 为有理式, 则 a, b, c 应满足什么条件?

六 (16 分) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可微, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 求证 $(0, +\infty)$ 内存在

一个单调数列 $\{\xi_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = +\infty$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(\xi_n) = 0$$

七 (16 分) 设 $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}$, 证明 $u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。