浙江师范大学 2006 年硕士研究生
入学考试试题

考试科目： 463 高等代数　　　**报考学科、专业：** 基础数学、应用数学、运筹学与控制论

一、填空题（每小题 5 分，满分共 50 分）

1．设 A 是 3 级矩阵且 $|A|=2$，则 $|(A)^{*}-(4A)^{-1}|=$__________.

2．代数基本定理是指__________.

3．设 m 是正整数，则 $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{m}=$__________.

4．设在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意 3 个向量都线性无关，则该向量组__________（填一定或不一定）线性无关.

5．设 A 是 3 级实数矩阵且 $|A|=2$，已知 A 的一个特征值是 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则它的全部特征值是__________.

6．设线性空间 V 上的线性变换 σ，τ 在 V 的某组基下的矩阵分别是 A, B，则线性变换 $\tau\sigma+3\tau^{2}$ 在同一组基下的矩阵分别是__________.

7．已知 3 维欧氏空间一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$，则向量 $\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$ 的长度 $|\beta|=$__________.

8．设 A 是 n 级矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是它的全部特征值，$f(x)=x^{3}-2$，则矩阵 $f(A)$ 的全部特征值是__________.

9．设 A 是 n 级实对称矩阵，则 A 为正定矩阵的充分必要条件是__________.

10．设 $\alpha_1=(0,0,2,3),\alpha_2=(0,0,1,3)$ 是 4 维线性空间 R^{4} 的两个向量，把它们扩充成 R^{4} 的一组基，你扩充得到的这组基为__________.

二、（满分 15 分）、计算下列n级行列式

$$d_n=\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

三（满分 10 分）、在有理数域上分解因式：$f(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$.

四（满分 10 分）、设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵A的行列式$|A|=0$且元素a_{12}的代数余子式$A_{12}\neq 0$，试求该线性方程组的基础解系。

五（满分 10 分）、设n级矩阵A满足$4A^3-A^2-2A=0$，证明矩阵E_n-A可逆，并求$(E_n-A)^{-1}$，其中E_n表示n级单位矩阵。

六（满分 15 分）、设$\alpha_1=(-1,0,1,-1)$，$\alpha_2=(3,1,1,1)$，$\alpha_3=(1,2,-1,2)$，$\beta_1=(2,5,-6,5)$，$\beta_2=(-1,2,-7,3)$，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，分别求$V_1+V_2$，$V_1\cap V_2$的维数和一组基。

七（满分 15 分）、已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1^2-4x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4tx_2x_3.$$

(1) 假设$f(x_1,x_2,x_3)$是负定二次型，求t的值。

(2) 当 $t=-1$ 时，试用正交变换化此二次型为标准型并写出所用的正交变换的矩阵。

八（满分 15 分）、设 f 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换（即满足：对任意的 $\alpha, \beta \in V, \quad (f(\alpha), \quad \beta) = (\alpha, \quad f(\beta))$）。

$$f(V) = \{f(\alpha) \mid \alpha \in V\}; \quad f^{-1}(0) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0\}$$

分别是 f 的值域和核。证明：$f(V)$ 是 $f^{-1}(0)$ 的正交补，即 $f(V) = (f^{-1}(0))^{\perp}$。

九（满分 10 分）、设 f 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换。证明：如果 f 在任意一组基下的矩阵都相同，则 f 是数乘变换。