

浙江师范大学 2011 年硕士研究生入学考试初试试题 (A 卷)

科目代码: 882 科目名称: 高等数学

适用专业: 070201 理论物理、070205 凝聚态物理、070207 光学

提示:

- 1、请将所有答案写于答题纸上, 写在试题上的不给分;
- 2、请填写准考证号后 6 位: _____。

一、填空题: (共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

(1) 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x+4)}}$ 的定义域用区间表示为 ①_____。

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x, & x \leq 0. \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a =$ ②_____。

(3) 由参数方程 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数为

$\frac{d^2y}{dx^2} =$ ③_____。

(4) 设 $F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$, 则 $F'(x) =$ ④_____。

(5) 曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 为凸的区间是 ⑤_____。

(6) $\int x^3 \ln x dx =$ ⑥_____。

(7) $\int_{-2}^2 \frac{\sin x + |x|}{2+x^2} dx =$ ⑦_____。

(8) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为 ⑧_____。

(9) 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy =$ ⑨_____。

(10) 四阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的非零特征值为__⑩__.

二、(本题满分 10 分)

设 a, b 为常数, 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + x + b}{x^2 - 1} = 3$, 求 a, b .

三、(本题满分 12 分)

试求 $y = x^3$ 上点 $(1, 1)$ 处切线与抛物线 $y = -x^2 + 4x$ 围成的平面图形的面积.

四、(本题满分 10 分)

求微分方程 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$ 的特解.

五、(本题满分 12 分)

设 $z = z(x, y)$ 由 $z + \ln z - \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$ 确定, 求 dz .

六、(本题满分 10 分)

设 $f(x, y)$ 在平面内连续, 且 $f(x, y) = x + y \iint_D f(u, v) du dv$, 其中 D 是由 $y = \frac{1}{x}$,

$x = 1$, $y = 2$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$.

七、(本题满分 12 分)

已知曲线积分 $\int_L (x + y \sin x) dx + \frac{f(x)}{x} dy$ 与积分路径 L 无关, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, 且 $f(\pi) = 0$, 求 $f(x)$.

八、(本题满分 10 分)

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} \cos(n^2 + 1)$ 的敛散性, 若收敛说明条件收敛或绝对收敛.

九、(本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数.

十、(本题满分 10 分)

若非零的三阶矩阵 B 的每个列向量都是下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解, (1) 求 λ 的值; (2) 证明 $|B| = 0$.

十一、(本题满分 14 分)

设 a, b 为常数, 且 $b > 0$, 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & b & -2 \\ b & 5 & a \\ -2 & a & 5 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$,

求: (1) a, b 的值; (2) 矩阵的 A 特征值和特征向量.